

## ТЕОРИЯ КВАЗИВОЛНОВОДНОЙ ГЕНЕРАЦИИ АКТИВНОГО СЛОЯ

В. М. АРУТЮНЯН, Г. П. ДЖОТЯН, А. В. КАРМЕНЯН

Исследованы основные характеристики квазिवолноводного режима генерации активного диэлектрического слоя (как однородного, так и неоднородного). Развита теория этого режима с учетом эффектов насыщения. Приводятся результаты численного анализа.

### В в е д е н и е

Классические формулы Френеля, описывающие отражение и преломление электромагнитной волны на границе раздела прозрачных диэлектриков, приводят к величине коэффициента отражения  $R \leq 1$ . В последние годы в работах [1, 2] экспериментально была показана возможность получения величины  $R > 1$  в случае, когда одна из граничащих сред активна, т. е. обладает способностью усиливать электромагнитную волну. В [2] на схеме полного внутреннего отражения на границе стекло—раствор красителя с использованием дополнительного резонатора была получена генерация с температурной перестройкой частоты излучения в пределах полосы люминесценции красителя. При отсутствии резонатора наблюдалась направленная сверхлюминесценция.

В [3] теоретически показано, что вблизи угла полного внутреннего отражения света на границе прозрачный диэлектрик—инверсная среда коэффициент отражения имеет максимум  $R_{\max} \approx e^2$ . В [4] было уточнено значение  $R_{\max} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$  и обращено внимание на то, что измерение

коэффициента отражения в эксперименте, подобном [1], приводит в некоторых случаях к величине  $R \approx 10^3$ . Была высказана мысль, что это несоответствие между экспериментом и теорией вызвано наличием градиента показателя преломления в растворе красителя из-за неоднородности инверсной населенности, обусловленной истощением накачки.

Исследование угловых и спектральных характеристик излучения раствора родамина 6G, а также их температурных зависимостей проведено в [5]. В [3, 4] утверждалось, что эффект усиления при отражении от инверсной среды имеет место только при углах падения  $\theta \geq \theta^*$  ( $\theta^*$  — угол полного внутреннего отражения). При этом  $R \leq 1$  при  $\theta < \theta^*$ ,  $R > 1$  при  $\theta > \theta^*$  и  $R$  терпит разрыв при  $\theta = \theta^*$ . В [6] показано, что при выполнении условия  $\epsilon_2 = n_2^2 - \kappa^2 < 0$  ( $n_2$  и  $\kappa$  — соответственно показатель преломления и коэффициент усиления активной среды) возможно усиление

ние света ( $R > 1$ ) при отражении от активного слоя под любым углом, в частности, и при  $\theta < \theta^*$ .

В [7, 8] решена задача об отражении электромагнитной волны от границы инверсной среды, показатель преломления которой  $n_2$  имеет неоднородное распределение:  $n_2 = n_2^0 - \Delta (1 - e^{-2k_1 z}) + i\kappa_2$ . Показано, что в такой модели усиливающей среды возможны сколь угодно большие коэффициенты отражения. Попытки обобщения формул Френеля на случай усиливающих сред сделаны также в работах [9—11].

Следует отметить, что одно только условие непрерывности тангенциальных составляющих компонент электромагнитной волны на границе раздела двух неограниченных сред, как известно, не приводит к однозначному нахождению преломленной волны (см., например, [12]). В случае, когда одна из граничащих сред является усиливающей, одна ветвь решения при  $\theta > \theta^*$  дает преломленную волну, экспоненциально нарастающую в активной среде и уходящую от границы раздела. Второе решение соответствует волне, затухающей в активной среде, однако бегущей в сторону границы раздела. За счет этой волны и оказывается возможным значение  $R > 1$  при  $\theta > \theta^*$ . Одной из основных проблем, возникающих при рассмотрении отражения (преломления) от активной неограниченной среды вблизи угла полного внутреннего отражения, во всех приведенных выше теоретических работах является правильный выбор ветви решения. При этом рядом исследователей (см., например, [3, 13]) делалась попытка избежать неоднозначности путем решения задачи для конечного слоя активного вещества (граничные условия на двух границах слоя приводят к однозначному решению задачи) с последующим предельным переходом к случаю неограниченных сред (толщина слоя  $l \rightarrow \infty$ ). Однако в случае усиливающих сред этот метод ошибочен из-за того, что при достаточно большой толщине активного слоя решение расходится вследствие неограниченного усиления волны при ее многократном отражении от границ слоя (см. также [14]).

В работе [15] проведен анализ устойчивости решения для преломленной на границе раздела двух неограниченных сред (в том числе, когда одна из сред является усиливающей) волны относительно изменения граничных условий.

В работе [16] рассмотрено отражение электромагнитной волны от однородной инверсной полупроводниковой пленки. Показано, что из-за многократного отражения от границ пленки и усиления волны в пленке при определенных толщинах пленки, когда выполняются оптимальные фазовые соотношения, наблюдается максимум коэффициента отражения, который может существенно превышать единицу.

В [17] теоретически была показана возможность усиления поверхностных волн в плоском волноводе за счет активной газовой среды, прилегающей к волноводу. В основе этого эффекта лежит упомянутое выше явление усиления света при полном внутреннем отражении от активной среды. Экспериментально такой пленочный усилитель света осуществлен в [18].

В подавляющем большинстве работ, в которых исследуется усиление электромагнитной волны при полном внутреннем отражении от активной

среды, последняя считается неограниченной. В то же время с практической точки зрения несомненный интерес представляет анализ особенностей отражения волны от активного слоя (в общем случае неоднородного). Этот интерес стимулируется главным образом тем обстоятельством, что при определенных условиях, которые подробно исследуются в настоящей работе, может иметь место генерационный режим излучения активного слоя. Отметим, что для рассматриваемого генератора не требуется какого-либо внешнего резонатора (ср., например, с плечными РОС-лазерами [19, 20]); обратная связь здесь осуществляется за счет многократного отражения волны от границ слоя. При этом может иметь место квазиволноводное распространение электромагнитной волны в активном слое. Экспериментально лазер такого типа осуществлен в работах [21, 22]. В недавней работе [23] приводятся приближенные выражения для порогового усиления и числа мод генерации активного слоя с показателем преломления  $n_2 = n_2^0 + ix$  при условии  $n_1 > n_2 > n_3$  ( $n_1, n_3$  — показатели преломления граничащих линейных сред).

В настоящей работе проводится подробный теоретический анализ генерационных свойств активного слоя в квазиволноводном режиме ( $n_2 < n_1$  и  $n_2 < n_3$ ). В §§ 1—4 исследуются пороговые соотношения для генерации однородного активного слоя. В § 5 приводятся результаты численного анализа пороговых соотношений для конкретных растворов красителей и граничащих сред. В §§ 6, 7 развита теория генерации с учетом эффектов насыщения. Найден энергетические характеристики и поперечное распределение мод генерации активного слоя. Реальные среды всегда имеют конечную длину, обычно обусловленную конечностью пространственной области накачки. Влияние ограниченности длины активного слоя на пороговые условия обсуждается в § 8. В § 9 анализируются условия применимости сделанных приближений и дается физическая интерпретация условий, необходимых для работы активного слоя в режиме генерации. В § 10 рассмотрен случай генерации при полном внутреннем отражении волны от одной из границ слоя. Приведенные в этом параграфе результаты обобщают результаты, полученные в [23]. При полном внутреннем отражении накачки от границы раздела между двумя полубесконечными диэлектрическими средами имеет место частичное проникновение излучения накачки в одну из этих сред. Если последняя является активной средой, то в ней под действием накачки создается тонкий неоднородный усиливающий слой. В § 11 исследованы пороговые характеристики такого активного слоя. Показано, что с точностью до численных коэффициентов эти характеристики совпадают с пороговыми характеристиками, найденными в случае однородного активного слоя.

## § 1. Однородный по коэффициенту усиления активный слой

Рассмотрим взаимодействие плоской монохроматической электромагнитной волны с однородным по коэффициенту усиления плоским активным слоем с показателем преломления  $n_2$ , заключенным между линейны-

ми (полубесконечными) средами с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  (рис. 1). В направлении осей  $x$  и  $y$  среды предполагаются однородными.

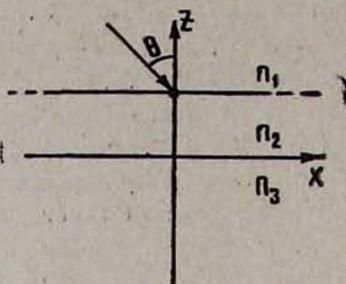


Рис. 1.

Найдем коэффициент отражения и преломления электромагнитной волны, падающей под углом  $\theta$  на активный слой со стороны среды с показателем преломления  $n_1$ . Очевидно, что в случае падения волны со стороны среды с показателем  $n_3$  в конечных результатах необходимо сделать замену  $n_1 \rightleftharpoons n_3$ .

Рассмотрим два случая линейной поляризации электромагнитной волны:

а) электрическая компонента поля поляризована перпендикулярно к плоскости падения, т. е. направлена вдоль оси  $y$ , магнитная компонента лежит в плоскости падения ( $E$ -поляризация);

б) по оси  $y$  поляризована магнитная компонента поля, а электрическая компонента лежит в плоскости падения ( $H$ -поляризация).

Временную зависимость напряженности полей выберем в виде  $e^{-i\omega t}$ . Так как в направлении оси  $x$  среда однородна, то напряженности электрического  $E(x, z, t)$  и магнитного  $H(x, z, t)$  полей в рассматриваемых средах можно представить в следующем виде:

$$E_j(x, z, t) = e_j(z) e^{i(q_j x - \omega t)}, \quad H_j(x, z, t) = h_j(z) e^{i(q_j x - \omega t)}$$

( $j = 1, 2, 3$  — индекс среды, как это показано на рис. 1).

а) Случай  $E$ -поляризации.

В этом случае отличны от нуля только  $y$ -составляющие вектора  $e_j$ , которые обозначим  $e_j(z) = e_j^{(y)}(z)$ . Волновые уравнения, описывающие электрическое поле в соответствующих средах, имеют следующий вид:

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + p_i^2 \right) e_i = 0 \quad (i = 1, 3), \tag{1.1}$$

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + p_2^2 \right) e_2 = i \frac{\omega}{c} n_2 \alpha e_2,$$

где  $p_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_j^2 - q_j^2)$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $\alpha$  — коэффициент усиления активной среды, зависящий как от параметров активной среды, так и от напряженности поля накачки. Из рис. 1 видно, что  $q_1 = n_1 \sin \theta$ .

Воспользовавшись уравнением Максвелла  $H = -i \frac{c}{\omega} \text{rot } E$ , для составляющих напряженности магнитного поля получим:

$$h_j^{(x)} = i \frac{c}{\omega} \frac{d}{dz} e_j, \quad (1.2)$$

$$h_j^{(z)} = \frac{c}{\omega} q_j e_j.$$

Граничные условия данной задачи представляют собой условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей электромагнитного поля на границах раздела рассматриваемых диэлектрических сред.

Для компонент  $E_j^{(y)} = E_j$  и  $H_j^{(x)}$  из (1.1) и (1.2) получаем выражения (для простоты записи временная зависимость опущена):

$$\begin{aligned} E_1 &= (c_{11} e^{-i \frac{\omega}{c} k_1 z} + c_{12} e^{i \frac{\omega}{c} k_1 z}) e^{i q_1 x}, \\ H_1^{(x)} &= k_1 (c_{11} e^{-i \frac{\omega}{c} k_1 z} - c_{12} e^{i \frac{\omega}{c} k_1 z}) e^{i q_1 x}, \\ E_2 &= (c_{21} e^{-i \frac{\omega}{c} k_2' z} + c_{22} e^{i \frac{\omega}{c} k_2' z}) e^{i q_2 x}, \\ H_2^{(x)} &= k_2' (c_{21} e^{-i \frac{\omega}{c} k_2' z} - c_{22} e^{i \frac{\omega}{c} k_2' z}) e^{i q_2 x}, \\ E_3 &= c_{31} e^{-i \frac{\omega}{c} k_3 z + i q_3 x}, \\ H_3^{(x)} &= k_3 c_{31} e^{-i \frac{\omega}{c} k_3 z + i q_3 x}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $k_1 = n_1 \cos \theta$ ,  $k_2' = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta - i \alpha n_2 c / \omega}$ ,  $k_3 = \sqrt{n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}$ ,  $c_{11}$  — амплитуда напряженности электрической компоненты падающей со стороны среды с показателем преломления  $n_1$  электромагнитной волны, а амплитуды отраженных и преломленных в рассматриваемой слоистой среде волн задаются величинами  $c_{ij}$ , которые определяются граничными условиями. Условие непрерывности тангенциальных составляющих поля на границах раздела вместе с предполагаемой однородностью сред в направлении оси  $x$  непосредственно приводит к условию  $q_3 = q_2 = q_1 = n_1 \sin \theta$ .

Из граничных условий, наложенных на границах раздела при  $z = 0$  и  $z = l$ , для коэффициентов отражения  $R_E$  и преломления  $T_E$  находим

$$R_E = \left| \frac{c_{12}}{c_{11}} \right|^2 = |P_E|^{-2} \left| \left( \frac{k_1 - k_2'}{k_1 + k_2'} + \frac{k_2' - k_3}{k_2' + k_3} e^{2i \frac{\omega}{c} k_2' l} \right) \right|^2, \quad (1.4)$$

$$T_E = \frac{\operatorname{Re}(k_3)}{k_1} \left| \frac{c_{31}}{c_{11}} \right|^2 = |P_E|^{-2} \frac{16 k_1 \operatorname{Re}(k_3) |k_2'|^2}{|(k_2' + k_3)(k_1 + k_2')|^2},$$

где

$$P_E = 1 + \frac{(k_1 - k_2')(k_2' - k_3) e^{2i \frac{\omega}{c} k_2' l}}{(k_1 + k_2')(k_2' + k_3)}. \quad (1.5)$$

б) Случай *H*-поляризации.

В этом случае отличны от нуля только *y*-составляющие вектора  $h_j$ , которые обозначим  $h_j(z) \equiv h_j^{(y)}(z)$ . Для амплитуд напряженности магнитного поля имеем уравнения, аналогичные (1.1), в которых следует сделать замену  $e_j \rightarrow h_j$ . Из уравнения Максвелла  $\mathbf{E} = i \frac{c}{\omega} \frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \mathbf{H}$  для составляющих электрического поля получаем

$$e_j^{(x)}(z) = -i \frac{c}{\omega} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{dh_j}{dz},$$

$$e_j^{(z)}(z) = -\frac{c}{\omega} \frac{q_j}{\varepsilon_j} h_j,$$
(1.6)

где введены диэлектрические проницаемости сред  $\varepsilon_j$ :  $\varepsilon_{1,3} = n_{1,3}^2$ ,  $\varepsilon_2 = n_2^2 - i \frac{c}{\omega} n_2 \alpha$ .

Воспользовавшись (1.1) и (1.6), находим

$$h_1 = d_{11} e^{-i \frac{\omega}{c} k_1 z} + d_{12} e^{i \frac{\omega}{c} k_1 z},$$

$$e_1^{(x)} = -\frac{k_1}{\varepsilon_1} [d_{11} e^{-i \frac{\omega}{c} k_1 z} - d_{12} e^{i \frac{\omega}{c} k_1 z}],$$

$$h_2 = d_{21} e^{-i \frac{\omega}{c} k_2' z} + d_{22} e^{i \frac{\omega}{c} k_2' z},$$

$$e_2^{(x)} = -\frac{k_2'}{\varepsilon_2} [d_{21} e^{-i \frac{\omega}{c} k_2' z} - d_{22} e^{i \frac{\omega}{c} k_2' z}],$$

$$h_3 = d_{31} e^{-i \frac{\omega}{c} k_3 z},$$

$$e_3^{(x)} = -\frac{k_3}{\varepsilon_3} d_{31} e^{-i \frac{\omega}{c} k_3 z}.$$
(1.7)

Величины  $k_j$  имеют тот же смысл, что и в (1.3),  $d_{11}$  — амплитуда напряженности магнитного поля волны, падающей со стороны среды с показателем преломления  $n_1$ .

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей электромагнитного поля на границах раздела ( $z = 0$ ,  $z = l$ ) для коэффициентов отражения  $R_H$  и преломления  $T_H$  получаем

$$R_H = \left| \frac{d_{12}}{d_{11}} \right|^2 = |P_H|^{-2} \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} e^{2i \frac{\omega}{c} m_2 l} \right|^2,$$

$$T_H = \frac{\text{Re}(m_3)}{m_1} \left| \frac{d_{31}}{d_{11}} \right|^2 = |P_H|^{-2} \frac{16 m_1 \text{Re}(m_3) |m_2|^2}{|(m_2 + m_3)(m_1 + m_2)|^2},$$
(1.8)

где

$$P_H = 1 + \frac{(m_2 - m_3)(m_1 - m_2)e^{2i \frac{\omega}{c} m_2 z l}}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2)}, \quad (1.9)$$

$$m_j = k_j / \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

## § 2. Пороговые соотношения для генерации однородного активного слоя

Из выражений для коэффициентов отражения  $R_{E, H}$  и преломления  $T_{E, H}$  следует, что при выполнении соотношений  $P_E = 0$  ( $E$ -поляризация) и  $P_H = 0$  ( $H$ -поляризация)  $R_{E, H}$  и  $T_{E, H}$  неограниченно возрастают. Эти соотношения соответствуют пороговым условиям для генерации активного слоя, которые имеют следующий вид:

а) в случае  $E$ -поляризации

$$1 + \frac{(k_2' - k_3)(k_1 - k_2')}{(k_2' + k_3)(k_1 + k_2')} \exp\left(2i \frac{\omega}{c} k_2' l\right) = 0; \quad (2.1)$$

б) в случае  $H$ -поляризации

$$1 + \frac{(m_2 - m_3)(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} \exp\left(2i \frac{\omega}{c} m_2 z l\right) = 0. \quad (2.2)$$

## § 3. Пороговые соотношения для больших толщин однородного активного слоя

В настоящем параграфе мы проведем приближенное исследование пороговых соотношений (2.1) и (2.2) для однородного по коэффициенту усиления активного слоя большой толщины. Понятия «большая» и «малая» толщина активного слоя ниже будут определены количественно.

Предположим, что имеет место условие малости коэффициента усиления:

$$n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta \gg \frac{c}{\omega} n_2 z. \quad (3.1)$$

Тогда приближенно имеем

$$k_2' = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} - \frac{i}{2} \frac{c}{\omega} \frac{n_2 z}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}.$$

а) *Случай  $E$ -поляризации.*

Из порогового соотношения (2.1) с учетом условия (3.1) малости коэффициента усиления следует выражение для порогового усиления мод генерации:

$$\alpha_m l = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{n_2} \frac{1}{l} m \times$$

$$\times \ln \left\{ \frac{\left( \sqrt{n_1^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} + \frac{\lambda}{2l} m \right) \left( \sqrt{n_3^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} + \frac{\lambda}{2l} m \right)}{\left( \sqrt{n_1^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} - \frac{\lambda}{2l} m \right) \left( \sqrt{n_3^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} - \frac{\lambda}{2l} m \right)} \right\}, \quad (3.2)$$

где  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$  — номер моды генерации.

В частном случае  $n_1 = n_3$  отсюда имеем

$$\alpha_m l = \frac{1}{n_2} \frac{\lambda}{l} m \ln \left\{ \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} + \frac{\lambda}{2l} m}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} - \frac{\lambda}{2l} m} \right\}. \quad (3.3)$$

Для углов выхода  $\theta_{im}$  ( $i = 1, 3$ ) излучения мод генерации в среде с показателями преломления  $n_1$  и  $n_3$  и углов  $\varphi_m$  распространения относительно оси  $x$  в активной среде имеем

$$\begin{aligned} \theta_{1m} &\simeq \arcsin \left[ \frac{1}{n_1} \sqrt{n_2^2 - \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} \right], \\ \theta_{3m} &\simeq \arcsin \left[ \frac{1}{n_3} \sqrt{n_2^2 - \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} \right], \\ \varphi_m &\simeq \arcsin \left[ \frac{\frac{\lambda}{2l} m}{\sqrt{n_2^2 - \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из условия вещественности величины  $\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} = \frac{\lambda}{2l} m$  получаем следующее ограничение на возможные номера мод генерации:

$$|m| \leq \frac{2l}{\lambda} n_2. \quad (3.5)$$

Следует отметить, что полученные выше выражения для углов распространения мод генерации, максимального количества генерируемых мод, а также порогового усиления имеют простой физический смысл. Так, выражение (3.4) для угла  $\varphi_m$  может быть получено из условия интерференции волн, излучаемых активным слоем при двух последовательных отражениях бегущей в активном слое волны от одной и той же границы; разность фаз между этими волнами есть  $\Delta_m = 2n_2 l \sin \varphi_m = 2\pi m$  ( $m$  — целое число), откуда получаем

$$\sin \varphi_m = \frac{1}{n_2} \frac{\lambda}{2l} m. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует (3.4), а также наибольший возможный номер моды генерации (см. выражение (3.5)).

Легко показать также, что пороговое соотношение (2.1) при условиях, рассматриваемых в настоящем параграфе, может быть представлено в виде

$$\exp(\alpha l / \sin \varphi_m) = (r_1 r_2)^{-1},$$

который представляет собой обычное условие порога для генерации лазера с коэффициентом усиления  $\alpha$  активной среды и расстоянием  $l' = l / \sin \varphi_m$  между зеркалами резонатора с коэффициентами отражения  $r_1$  и  $r_2$ . В рассматриваемом случае квазиволноводной генерации активного слоя роль зеркал играют границы активного слоя, а  $r_1$  и  $r_2$ , согласно формулам Френеля, представляют собой коэффициенты отражения электромагнитной волны от границ раздела рассматриваемой слоистой среды.

При выполнении дополнительного условия

$$\frac{\lambda}{l} |m| \left( \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n_3^2 - n_2^2}} \right) \ll 1 \quad (3.7)$$

приведенные выше выражения для углов генерации и порогового усиления принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} \theta_{1m} &\simeq \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right) - \frac{1}{2 n_2} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \left( \frac{\lambda}{2l} \right)^2 m^2, \\ \varphi_m &\simeq \frac{1}{2 n_2} \frac{\lambda}{l} m, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \theta_{3m} &\simeq \arcsin \left( \frac{n_2}{n_3} \right) - \frac{1}{2 n_2} \frac{1}{\sqrt{n_3^2 - n_2^2}} \left( \frac{\lambda}{2l} \right)^2 m^2, \\ \alpha_m l &\simeq \frac{\alpha}{n_2} \left( \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n_3^2 - n_2^2}} \right) \left( \frac{\lambda}{2l} \right)^2 m^2. \end{aligned}$$

Расстояние  $L_m$  между двумя последовательными отражениями от границ активного слоя найдем из условия  $l/L_m = \sin \varphi_m \simeq \varphi_m$ , откуда

$$L_m = 2 n_2 \frac{l^2}{\lambda |m|}.$$

Усиление на этой длине равно

$$\alpha L_m = \frac{\lambda}{l} |m| \left( \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n_3^2 - n_2^2}} \right) \ll 1. \quad (3.9)$$

Условие применимости приближений, сделанных в настоящем параграфе, следует из (3.1), откуда с учетом (3.2) и (3.7) получаем

$$\xi_m = \frac{4l}{\lambda |m|} \left[ \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n_3^2 - n_2^2}} \right]^{-1} \gg 1. \quad (3.10)$$

В теории плоских симметричных ( $n_1 = n_3$ ) волноводов величина  $\xi_1^{-1} = \lambda / (2l \sqrt{n_1^2 - n_2^2})$  представляет собой отношение толщины плоско-

го волноводного слоя, при котором имеет место одномодовый режим распространения, к полной толщине волновода. Таким образом, условие (3.10) соответствует условию многомодовости генерации активного слоя и количественно определяет понятие «большая толщина активного слоя», введенное в начале параграфа. Из выражения (3.9) следует, что  $\alpha L_m = 4 \xi_m^{-1}$ , т. е. величина  $\xi_m^{-1}$  пропорциональна усилению волны на длине между двумя последовательными отражениями и в случае активного слоя большой толщины мала ( $\xi_m \gg 1$ ).

б) *Случай H-поляризации.*

Исследование порогового условия (2.2) для генерации в случае H-поляризации излучения при большой толщине активного слоя ( $\xi_m \gg 1$ ) аналогично анализу, проведенному выше для случая E-поляризации. Получаемые при этом выражения для углов распространения мод генерации в соответствующих средах те же, что и в случае E-поляризации. Для порогового усиления вместо (3.2) имеем

$$x_m l = \frac{1}{2 n_2} \frac{\lambda}{l} m \times \ln \left\{ \frac{\left[ \frac{n_2^2}{n_1^2} \sqrt{n_1^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} + \frac{\lambda}{2l} m \right] \left[ \frac{n_2^2}{n_3^2} \sqrt{n_3^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} + \frac{\lambda}{2l} m \right]}{\left[ \frac{n_2^2}{n_1^2} \sqrt{n_1^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} - \frac{\lambda}{2l} m \right] \left[ \frac{n_2^2}{n_3^2} \sqrt{n_3^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} - \frac{\lambda}{2l} m \right]} \right\}.$$

При выполнении дополнительного условия (3.7) отсюда получаем ( $n_1 = n_3$ ):

$$a_m l \simeq \frac{1}{n_2} \left(\frac{\lambda}{l} m\right)^2 \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}. \quad (3.11)$$

Сравнение (3.11) с (3.8) показывает, что порог генерации H-поляризованного излучения при прочих равных условиях в  $(n_1/n_2)^2$  ( $n_1 > n_2$ ) раз больше порога генерации E-поляризованного излучения. Отсюда следует, что соответствующим подбором параметров накачки и рассматриваемой слоистой среды можно получить полностью (E-) поляризованную моду излучения активного слоя.

Из анализа, проведенного в этом пункте, следует, что в случае большой толщины активного слоя ( $\xi_m \gg 1$ ) порог его генерации существенным образом зависит от длины волны  $\lambda$  генерации, толщины слоя  $l$ , номера моды  $m$  и соотношения между показателями преломления активной среды ( $n_2$ ) и ограничивающих активный слой пассивных сред ( $n_1, n_3$ ). Как видно из (3.8), порог этот ниже для меньших длин волн. Таким образом, при приближении величины интенсивности накачки к пороговому значению в первую очередь возбуждается генерация коротковолновой части спектра люминесценции активного вещества. При фиксированной длине волны порог генерации возрастает с увеличением номера моды генерации. Порог генерации уменьшается с ростом толщины активного слоя (он обратно пропорционален  $l^3$ ) и возрастает при сближении величин по-

казателей преломления активной и прилегающих пассивных сред (при этом не должно нарушаться условие (3.10)). Как следует из (3.8), углы выхода излучения генерации  $\theta_{im}$  ( $i = 1, 3$ ) в прилегающие среды для данной моды  $m$  тем меньше, чем больше длина волны. При фиксированной длине волны углы выхода  $\theta_{im}$  уменьшаются с ростом номера моды; при этом угловое расстояние между соседними модами возрастает.

Следует отметить, что изменение толщины активного слоя вдоль пространственной области накачки (неоднородность обработки или непараллельность поверхностей, ограничивающих активный слой и т. д.) приводит к возникновению дополнительной спектральной ширины излучения генерации. Величина  $\delta\lambda/\delta l$  при фиксированной интенсивности накачки и пренебрежении дисперсией показателей преломления сред может быть оценена из последнего уравнения в (3.8):

$$\frac{\delta\lambda}{\delta l} = \frac{3l^2 n_2 \alpha_m}{\pi^2 \lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n_3^2 - n_2^2}} \right)^{-1}.$$

#### § 4. Пороговые соотношения для малых толщин однородного активного слоя

В настоящем параграфе мы проведем приближенное исследование пороговых соотношений для активной среды малой толщины, предполагая выполненным условие, обратное условию (3.1):

$$\frac{c}{\omega} n_2 \alpha \gg n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta. \quad (4.1)$$

Воспользовавшись последним, имеем

$$k'_2 \approx \sqrt{-i \alpha n_2 c / \omega} + \frac{1}{2} \frac{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{-i \alpha n_2 c / \omega}}.$$

Условие малости толщины активного слоя приводит к соотношению  $2 \frac{\omega}{c} |k'_2| l \ll 1$ . Ниже будет показано, что последнее неравенство имеет место при  $\xi_1 \ll 1$  ( $\xi_m \ll 1$ ). Считая приведенные условия выполненными и для простоты рассматривая случай  $n_1 = n_3$ , пороговое соотношение (2.1) приближенно представим в виде

$$\left( 1 + 2i \frac{\omega}{c} k'_2 l \right) (1 - 4k_1/k'_2) = 1, \quad (4.2)$$

где  $|k_1/k'_2| \ll 1$ . Из (4.2) получаем

$$\cos \theta_1 = \sqrt{1 - n_2^2/n_1^2}, \quad (4.3)$$

$$\alpha_{\text{пор}} l = 2 \sqrt{n_1^2/n_2^2 - 1}.$$

Условие применимости сделанных приближений с учетом (4.3) принимает вид

$$\xi_1 = \left[ \frac{\lambda}{2l \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \right]^{-1} \ll 1. \quad (4.4)$$

Следует отметить, что характеристики генерации активного слоя большой ( $\xi_1 \gg 1$ ) и малой ( $\xi_1 \ll 1$ ) толщин существенным образом различаются. В частности, если в первом случае имеет место многомодовый режим генерации, то во втором случае генерация является одномодовой. Различны также зависимости пороговых усилений от толщины  $l$  активного слоя и длины волны  $\lambda$  генерации (ср. (3.2) и (3.8) с (4.3)).

Как следует из (4.3), порог генерации тонкого активного слоя, в отличие от случая толстого слоя, убывает при сближении показателей преломления активной и прилегающих сред, а зависимость порога от длины волны полностью определяется дисперсией показателей преломления. При этом для частоты генерации  $\omega^*$  такой, что  $n_1(\omega^*) \approx n_2(\omega^*)$ , порог минимален. Использование анизотропной среды в качестве среды, ограничивающей активный слой, позволяет изменять частоту  $\omega^*$  (т. е. перестраивать частоту генерации) путем вращения анизотропной прилегающей среды. Угол выхода излучения генерации в прилегающие среды при этом близок к  $\pi/2$ .

### § 5. Численный анализ пороговых соотношений

В настоящем параграфе приводятся результаты численного анализа порогового соотношения (2.1) в случае конкретных растворов красителей (активная среда) и прилегающих пассивных сред. На рис. 2, 3 для первых трех мод генерации представлены зависимости нормированного порогового усиления  $\gamma = \alpha_m \lambda / 2\pi$  и угла выхода излучения генерации в прилегающие среды от безразмерного параметра  $\xi = \frac{2l}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$  при а)  $n_1 = n_3 =$

$= 1,46$  (кварц),  $n_2 = 1,36$  (спиртовой раствор красителя) (рис. 2а, 3а) и б)  $n_1 = n_3 = 1,5$  (стекло),  $n_2 = 1,45$  (метилацетат) (рис. 2б, 3б). Пункти-

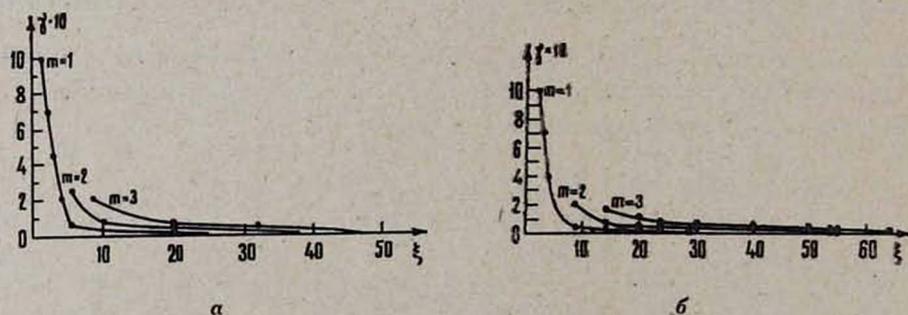


Рис. 2. Зависимость нормированного порогового усиления  $\gamma = \alpha_m \lambda / 2\pi$  от параметра  $\xi = \frac{2l}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ : а)  $n_1 = n_3 = 1,46$  (кварц),  $n_2 = 1,36$  (спиртовой раствор родамина 6 G); б)  $n_1 = n_3 = 1,5$  (стекло),  $n_2 = 1,45$  (метилацетат),  $m$  — номер моды.

ром на рис. 3 изображены результаты расчета по приближенным формулам (3.14), справедливым для случая толстого активного слоя. Видно, что при  $\xi \geq 15$  в случае (а) (рис. 3а) и при  $\xi \geq 30$  в случае (б) (рис. 3б) приближенные формулы (3.14) достаточно точно описывают характеристики генерации активного слоя большой толщины. При этом зависимость

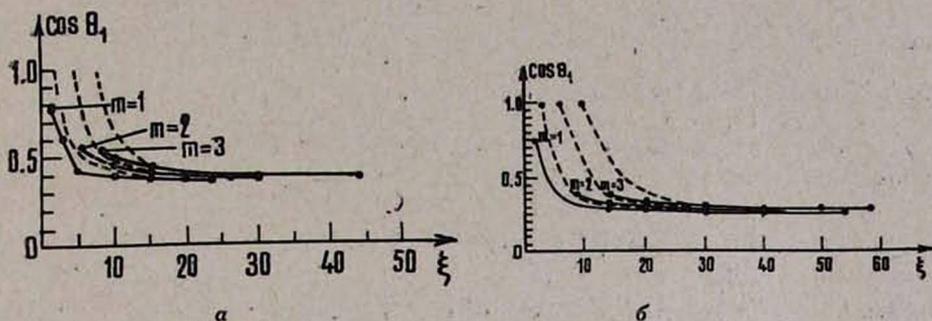


Рис. 3. Зависимость угла выхода излучения генерации в прилегающие среды от параметра  $\xi = \frac{2l}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ : а)  $n_1 = n_3 = 1,46$ ,  $n_2 = 1,36$ ; б)  $n_1 = n_3 = 1,5$ ,  $n_2 = 1,45$ ; пунктиром изображены результаты расчета по приближенным формулам (3.14),  $m$  — номер моды.

порогового усиления от толщины активного слоя при фиксированной длине волны пропорциональна  $1/l^3$  и соотношение пороговых усилений для соседних мод генерации есть  $\alpha_m/\alpha_{m+1} = m^2/(m+1)^2$ . На рис. 3 видно, что моды с большим номером излучаются под меньшими углами  $\theta$ . Эти углы при  $\xi \gg 1$  сближаются и стремятся к величине угла полного внутреннего отражения  $\theta$  при падении волны из пассивной среды на активный слой. В случае слоистой среды а) кварц—спиртовой раствор красителя—кварц  $\cos \theta^* = 0,368$  (рис. 3а), а в случае б) стекло—метилацетат—стекло  $\cos \theta^* = 0,257$  (рис. 3б).

## § 6. Теория генерации в однородном активном толстом слое

В этом параграфе решается задача о генерации плоского однородного активного слоя (рис. 1). Рассматривается случай  $E$ -поляризованной волны.

Для установившегося режима генерации с законом насыщения  $(1 + \beta^2 |E|^2)^{-1}$  волновые уравнения в соответствующих средах имеют следующий вид:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2\right) E_1 = 0 \quad (i=1, 3), \quad (6.1)$$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2\right) E_2 = i \frac{\omega}{c} n_2 \alpha E_2 / (1 + \beta^2 |E_2|^2).$$

Решения уравнений (6.1) ищем в виде  $E_j = e_j(z) e^{iqx}$  ( $j=1, 2, 3$ ). Для напряженностей электрического поля в пассивных средах из (6.1) получаем (временная зависимость типа  $e^{-i\omega t}$  для простоты опущена):

$$E_1(x, z) = C \exp\left(-i \frac{\omega}{c} k_1 z + i q x\right),$$

$$E_3(x, z) = D \exp\left(i \frac{\omega}{c} k_3 z + i q x\right),$$

где  $k_1 = \sqrt{n_1^2 - \frac{c^2}{\omega^2} q^2}$ ,  $k_3 = \sqrt{n_3^2 - \frac{c^2}{\omega^2} q^2}$ , а  $q$ ,  $C$  и  $D$  — постоянные, определяемые из граничных условий.

Амплитуду напряженности электрического поля в активной среде представим в виде

$$e_2(z) = A(z) \exp\left(i \frac{\omega}{c} k_2 z\right) + B(z) \exp\left(-i \frac{\omega}{c} k_2 z\right).$$

Будем пренебрегать эффектами интерференции волн в активной среде, считая

$$|e_2|^2 \approx |A(z)|^2 + |B(z)|^2.$$

Предположив, что амплитуды  $A(z)$  и  $B(z)$  на длине волны изменяются мало, и укоротив второе уравнение в (6.1), для безразмерных амплитуд  $a = \beta A(z)$  и  $b = \beta B(z)$  получим следующие уравнения:

$$\frac{d}{dz} a = \frac{n_2^2}{2k_2} a (1 + |a|^2 + |b|^2), \quad (6.2)$$

$$\frac{d}{dz} b = -\frac{n_2^2}{2k_2} b (1 + |a|^2 + |b|^2).$$

Переходя отсюда к уравнениям для интенсивностей  $J_1 = |a|^2$  и  $J_2 = |b|^2$  и решая их, приходим с учетом (6.2) к соотношениям

$$\ln [J_1(z)/J_1(0)] + J_1(z) - J_1(0) + c_1(1/J_1(0) - 1/J_1(z)) = \frac{n_2^2}{k_2} z, \quad (6.3)$$

$$a = a(0) \sqrt{J_1(z)/J_1(0)}, \quad b = b(0) \sqrt{J_2(z)/J_2(0)},$$

где  $a(0) = a(z=0)$ ,  $b(0) = b(z=0)$ ,  $J_{1,2}(0) = J_{1,2}(z=0)$ .

Воспользовавшись условием непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границах раздела  $z=0$ ,  $z=l$  и введя обозначения  $\beta C = c$ ,  $\beta D \exp\left(i \frac{\omega}{c} k_3 l\right) = d$ , приходим к следующей системе уравнений:

$$a(0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) c, \quad a(0) \sqrt{\frac{J_1(l)}{J_1(0)}} e^{i \frac{\omega}{c} k_2 l} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_3}{k_2}\right) d, \quad (6.4)$$

$$b(0) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) c, \quad b(0) \sqrt{\frac{J_2(l)}{J_2(0)}} e^{-i \frac{\omega}{c} k_2 l} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_3}{k_2}\right) d.$$

Условие существования нетривиального решения этой однородной системы уравнений приводит к соотношению, которое фактически является аналогом порогового условия для генерации активного слоя и с учетом соотношения  $J_1(l)J_2(0)/J_1(0)J_2(l) = J_1^2(l)/J_1^2(0)$  принимает вид

$$\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) \left(\frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2}\right) \frac{J_1(l)}{J_1(0)} e^{2l \frac{\omega}{c} k_2 l} = 1,$$

откуда

$$\frac{\omega}{c} k_2 l = \pi m \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

(6.5)

$$J_1(l)/J_1(0) = \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)}.$$

Воспользовавшись соотношениями (6.3), (6.4) и (6.5), для интенсивности выходного излучения  $J_{\text{вых}}$  получаем

$$J_{\text{вых}} = |c|^2 = |d|^2 = \frac{n_2 l}{2k_1} \left[ \alpha - \frac{2k_2}{n_2 l} \ln \left( \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \right) \right];$$

при  $|k_2/k_1| \ll 1$  имеем

$$J_{\text{вых}}^{(m)} = \frac{n_2}{2\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \left\{ \alpha l - \frac{1}{n_2 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \left( \frac{\lambda}{l} m \right)^2 \right\}. \quad (6.6)$$

В частности, из условия  $J_{\text{вых}}^{(m)} = 0$  вытекает пороговое соотношение (3.8). При интенсивности накачки, близкой к пороговому значению, интенсивность выходного излучения  $J_{\text{вых}}^{(m)}$  растет с увеличением толщины  $l$  активного слоя быстрее, чем при большом превышении над порогом. Как следует из (6.6),  $J_{\text{вых}}^{(m)}$  убывает с увеличением длины волны и ростом номера моды генерации. Однако при большом превышении над порогом зависимость  $J_{\text{вых}}^{(m)}$  от  $\lambda$  и  $m$  становится несущественной.

Следует отметить существование оптимума в зависимости  $J_{\text{вых}}^{(m)}$  от разности показателей преломления  $(n_1 - n_2)$ . При

$$n_1 = \sqrt{n_2^2 + \frac{4}{(\alpha l n_2)^2} \left( \frac{\lambda}{l} m \right)^4}$$

интенсивность выходного излучения достигает максимального значения, равного

$$J_{\text{вых}}^{(m)\text{max}} = \frac{1}{8} \left( \frac{n_2 \alpha l^2}{\lambda m} \right)^2.$$

## § 7. Теория генерации в однородном активном тонком слое

Воспользуемся системой уравнений (6.1). Выражения для амплитуд  $e_i(z)$  представим в виде

$$e_1 = A \exp\left(i \frac{\omega}{c} k_1 z\right), \quad e_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n, \quad e_3 = D \exp\left(-i \frac{\omega}{c} k_1 z\right). \quad (7.1)$$

Для простоты предполагается, что показатели прилегающих к активному слою линейных пассивных сред одинаковы:  $n_1 = n_3$  ( $k_1 = k_3$ ).

Подставив (7.1) в систему уравнений (6.1), воспользовавшись граничными условиями и учитывая малость толщины активного слоя, с точностью до членов, пропорциональных  $l^3$  включительно, находим

$$2k_1 - l \left[ \frac{n_2 \alpha}{2 + \beta^2 |D|^2} + \frac{\omega}{c} (k_1^2 + k_2^2) \right] + l^2 k_1 \frac{\omega}{c} \frac{n_2 \alpha}{1 + \beta^2 |D|^2} - \\ - l^3 \frac{1}{6} \frac{\omega}{c} \left[ \left( \frac{n_2 \alpha}{1 + \beta^2 |D|^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} k_2^2 (k_1^2 + k_2^2) \right] = 0.$$

Решим это уравнение методом теории возмущений, считая малым параметром  $l$ :

$$k_1 = \frac{n_2 \alpha l}{2(1 + \beta^2 |D|^2)}, \quad k_1^2 + k_2^2 - k_1 l \frac{n_2 \alpha}{1 + \beta^2 |D|^2} + \frac{l^2}{6} \left( \frac{n_2 \alpha}{1 + \beta^2 |D|^2} \right)^2 = 0, \quad (7.2)$$

откуда

$$k_2^2 = \frac{1}{3} k_1^2;$$

для угла  $\theta$  выхода излучения в прилегающие среды получаем

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \right)}. \quad (7.3)$$

Из (7.2) с учетом (7.3) имеем

$$\beta^2 |D|^2 = \frac{\alpha l}{\sqrt{6} \sqrt{n_1^2/n_2^2 - 1}} - 1,$$

откуда для порогового усиления ( $|D|^2 = 0$ ) получаем

$$(\alpha l)_{\text{пор}} = \sqrt{6} \sqrt{n_1^2/n_2^2 - 1}. \quad (7.4)$$

Это выражение в случае тонкого однородного активного слоя с точностью до численного коэффициента совпадает с найденным выше (см. (4.3), а также обсуждение в конце § 4).

### § 8. Пороговые соотношения с учетом ограниченности длины активного слоя

В настоящем параграфе исследуется влияние ограниченности области накачки активного слоя вдоль оси  $x$  на пороговые соотношения. Излучение генерации будем считать  $E$ -поляризованным. Волновое уравнение в активной среде запишем в виде

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 \right) E_2 = l \frac{\omega}{c} n_2 E_2 \alpha(x), \quad (8.1)$$

где предполагается, что коэффициент усиления  $\alpha(x)$  имеет произвольную, достаточно гладкую зависимость от продольной координаты  $x$ . Волновые

уравнения в прилегающих линейных средах имеют тот же вид, что и в (1.1).

Представим  $\alpha(x)$ , а также  $E_j(x, z)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в виде разложения в интеграл Фурье:

$$E_j(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e_j(q, z) e^{iqx} dq,$$

$$\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(Q) e^{-iQx} dQ.$$

Подстановка в (8.1) приводит к следующему уравнению для фурье-компонент напряженности электрического поля:

$$\frac{d^2}{dz^2} e_2(q, z) + p_2^2(q) e_2(q, z) = i \frac{\omega}{c} n_2 \int_{-\infty}^{\infty} dQ \alpha(Q) e_2(Q+q, z), \quad (8.2)$$

где  $p_2(q) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - q^2}$ .

Решение уравнения (8.2) ищем в виде

$$e_2(q, z) = c_1(q, z) e^{ip_2(q)z} + c_2(q, z) e^{-ip_2(q)z}, \quad (8.3)$$

где  $c_{1,2}(q, z)$  — медленно меняющиеся по сравнению с  $\exp[ip_2(q)z]$  функции  $z$ . Подстановка (8.3) в (8.2) и решение полученного укороченного уравнения с учетом медленного изменения  $\alpha(x)$  ( $\alpha(Q)$  имеет острый максимум вблизи  $Q=0$ ) приводит к следующим выражениям для коэффициентов  $c_{1,2}(q, z)$ :

$$c_1(q, z) = A(q) \exp \left\{ \frac{\omega n_2}{2c p_2(q)} \int_0^z \alpha \left( \frac{q}{p_2(q)} z' \right) dz' \right\}, \quad (8.4)$$

$$c_2(q, z) = B(q) \exp \left\{ -\frac{\omega n_2}{2c p_2(q)} \int_0^z \alpha \left( -\frac{q}{p_2(q)} z' \right) dz' \right\}.$$

Воспользовавшись граничными условиями, получаем соотношение

$$\frac{(p_2 - p_3)(p_2 - p_1)}{(p_2 + p_3)(p_2 + p_1)} \exp(\mu_1 + \mu_2 + 2ip_2 l) = 1, \quad (8.5)$$

где

$$\mu_1(q) = \frac{\omega n_2}{2c q} \int_0^{q/p_2(q)} \alpha(x) dx, \quad \mu_2(q) = \frac{\omega n_2}{2c q} \int_{-q/p_2(q)}^0 \alpha(x) dx.$$

В частном случае  $n_1 = n_3$  ( $p_1 = p_3$ ) из (8.5) имеем

$$\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^2 \exp(2ip_2 l + \mu_1 + \mu_2) = 1, \quad (8.6)$$

$$p_2 = \frac{\pi m}{l}, \quad q = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2}, \quad p_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2}.$$

Условие вещественности  $q$  накладывает ограничение на число мод:

$$-2n_2 \frac{l}{\lambda} \leq m \leq 2n_2 \frac{l}{\lambda}.$$

Реальная часть уравнения (8.6) приводит к соотношению

$$\mu_1 + \mu_2 = 2 \ln \left\{ \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} + \frac{\lambda}{2l} m}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} - \frac{\lambda}{2l} m} \right\}, \quad (8.7)$$

где

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{\omega n_2}{2c q} \int_{-q l / p_2(q)}^{q l / p_2(q)} \alpha(x) dx,$$

причем величина  $q l / p_2(q) = l \sqrt{n_2^2 - \left(\frac{\lambda}{2l} m\right)^2} / \left(\frac{\lambda}{2l} m\right) = L_m$  представляет собой расстояние между двумя последовательными отражениями от границ активного слоя. Учитывая это и используя введенный выше параметр  $\xi_m = 2l \sqrt{n_1^2 - n_2^2} / m \lambda$ , перепишем пороговое условие (8.7) в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \int_{-L_m}^{L_m} \alpha_m(x) dx = 2 \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_m^2} \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} - 1\right)} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 + \xi_m^2} + 1}{\sqrt{1 + \xi_m^2} - 1} \right]. \quad (8.8)$$

Исследуем (8.8) с учетом конечности длины  $L$  активной среды. Рассмотрим два случая:  $L_m < L/2$  и  $L_m > L/2$ .

В случае  $L_m < L/2$  из (8.8) приближенно имеем

$$\alpha_m l = \frac{2}{\xi_m} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} - 1} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 + \xi_m^2} + 1}{\sqrt{1 + \xi_m^2} - 1} \right] \quad (8.9)$$

вместе с условием

$$\frac{\xi_m^2 n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} - 1 < L^2 / 4 l^2,$$

откуда получаем ограничение на возможные номера мод:

$$m > 4 n_2 \frac{l^2}{\lambda L}.$$

В случае  $L_m > L/2$  для порогового усиления имеем

$$\alpha_m l = \frac{4l}{L} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_m^2} \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} - 1\right)} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 + \xi_m^2} + 1}{\sqrt{1 + \xi_m^2} - 1} \right]. \quad (8.10)$$

Следует отметить, что выражения (8.9) и (8.10), полученные для рассматриваемых двух разных случаев, имеют качественно разную зависимость от толщины активного слоя  $l$ , длины волны  $\lambda$  генерации, а также номера моды  $m$ . В частности, в случае толстой активной среды, когда  $\xi_m \gg 1$ , аппроксимируя  $\ln[(\sqrt{1+\xi_m^2}+1)/(\sqrt{1+\xi_m^2}-1)] \simeq 2/\xi_m$ , для пороговых усилений из (8.9) и (8.10) приближенно имеем

$$\alpha_m \simeq \frac{\lambda^2 m^2}{n_2 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} l^3} \quad (L_m < L/2),$$

$$\alpha_m \simeq \frac{4\lambda |m|}{lL \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \quad (L_m > L/2).$$

### § 9. Условия применимости

Для работы любого лазера необходима обратная связь. В рассматриваемом в настоящей работе случае квазиволноводной генерации активного слоя обратная связь осуществляется за счет отражения световой волны от границ активного слоя. Резонатор формируется при условии, что число отражений больше единицы. Это возможно, когда  $L_m < L$ , откуда следует

$$|m| > m^* = 2n_2 \frac{l^2}{\lambda L}. \quad (9.1)$$

При этом угол распространения фотона в активной среде  $\varphi_m > l/L$  ( $\varphi_0 = l/L$  — максимальный угол относительно оси  $x$ , под которым еще отсутствует отражение от границы). Нетрудно убедиться, что при выполнении (9.1) поток энергии через отражающие слои больше потока энергии для углов  $\varphi \leq \varphi_0$ .

Картина генерации существенным образом зависит от значения  $m^*$ . Если  $m^* < 1$ , то для всех мод  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$  резонатор хорошо формируется и справедливы формулы, соответствующие неограниченной по длине активной среде. При  $m^* > 1$  необходимо отдельно рассмотреть случаи  $|m| < m^*$  и  $|m| > m^*$ . Для мод с номерами  $|m| < m^*$  резонатор практически отсутствует, поток энергии направлен вдоль оси  $x$ . Для мод с номерами  $|m| > m^*$  резонатор формируется. Однако необходимо учесть, что моды с  $|m| > m^*$  несут в себе сравнительно малую долю энергии генерации. Это видно также из того, что для мод с  $|m| > m^*$  порог выше, чем для мод с  $|m| < m^*$ . Поэтому в случае  $m^* > 1$  картина напоминает режим свертлюминесценции.

Из соотношения (9.1) следует существование характерной толщины  $l^*$  активного слоя,

$$l^* = \left( \frac{\lambda L}{2n_2} \right)^{1/2}, \quad (9.2)$$

такой, что при  $l > l^*$  имеет место режим свертлюминесценции. В обратном случае  $l < l^*$  наблюдается режим генерации. В видимом диапазоне для  $L \simeq 1 \text{ см}$   $l^* = 10 \text{ мкм}$ .

## § 10. Пороговые соотношения в случае полного внутреннего отражения от одной из границ однородного активного слоя

а) *Случай E-поляризации излучения генерации.*

Исследуем пороговое условие генерации (2.1) в случае, когда имеет место полное внутреннее отражение излучения от одной из границ активного слоя, например, от границы с линейной средой с показателем преломления  $n_3$ . При этом  $z$ -компонента волнового вектора в этой среде есть мнимая величина:  $k_3 = \sqrt{n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1} = i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_3^2}$ ; это соответствует затухающей (нераспространяющейся) волне в этой среде ( $\theta_1$  — угол выхода генерации в среде с показателем преломления  $n_1$ ).

Предположим, что толщина активного слоя большая ( $\lambda/l \ll 1$ ). Согласно анализу, проведенному в § 3, имеем  $\sin \theta_1 \simeq n_2/n_1$ ,  $k_3 = i\sqrt{n_2^2 - n_3^2}$  ( $n_2 > n_3$ ),  $k_1 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ ,  $k_2 = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}$ ,  $|k_2|/|k_1| \ll 1$ ,  $|k_2|/|k_3| \ll 1$ . При этих условиях из (2.1) получаем

$$1 - 2 \frac{k_2}{k_1} + \frac{n_2^2 l}{k_2} = \cos \left( 2 k_2 l \frac{\omega}{c} \right), \quad (10.1)$$

$$2 \frac{k_2}{k_3} = \sin \left( 2 k_2 l \frac{\omega}{c} \right). \quad (10.2)$$

Учитывая, что  $|k_2|/|k_3| \ll 1$ , из (10.2) приближенно имеем  $2 k_2 l \omega/c = n\pi$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), откуда  $k_2 = n\lambda/4l$ . Подставляя это выражение в (10.1), находим

$$1 - \frac{n\lambda}{2lk_1} + \frac{4n_2^2 l^2}{n\lambda} = (-1)^n. \quad (10.3)$$

При  $n = \pm 2m$  отсюда получаем

$$\alpha_{m,l} = \frac{m^2 \lambda^2}{2n_2 l^3 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}. \quad (10.4)$$

При  $n = \pm (2m + 1)$  уравнение (10.3) не имеет решения. Отметим, что выражение (10.4) совпадает с выражением для порога, приведенным в работе [23]. Угол выхода излучения генерации в среду с показателем преломления  $n_1$  имеет тот же вид, что и в (3.11).

б) *Случай H-поляризации излучения генерации.*

Вместо порогового условия (10.4) теперь получаем

$$\alpha_{m,l} = \frac{\lambda^2 m^2}{2n_2 l} \frac{n_1^2/n_2^2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}. \quad (10.5)$$

## § 11. Случай полного внутреннего отражения накачки

При полном внутреннем отражении накачки от границы раздела между полубесконечными пассивной линейной и активной средами за счет частичного проникновения излучения накачки в активную среду в последней создается неоднородный активный слой. В этом параграфе исследуют-

ся пороговые условия для генерации такого слоя. Коэффициент усиления активного слоя в рассматриваемом случае представим в виде

$$\alpha(z) = \alpha_0 e^{-2\mu z}$$

Полное решение волнового уравнения для напряженности электрического поля (волна предполагается  $E$ -поляризованной) (см. (1.1)) в активной среде имеет следующий вид:

$$e_2(z) = A J_{1\nu}(ke^{-\mu z}) + B J_{-1\nu}(ke^{-\mu z}),$$

где  $J_{\pm 1\nu}$  — функция Бесселя,  $k^2 = -i \frac{\omega}{c} \alpha \frac{n_2}{\mu^2}$ ,  $\nu = \frac{\omega}{c} n_2 \frac{\cos \theta}{\mu}$ . Граничные условия данной задачи следуют из условий непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей компонент электромагнитного поля на границе раздела сред и требования, чтобы при  $z \rightarrow +\infty$  ( $\alpha(z) \rightarrow 0$ ) решение волнового уравнения имело вид волны, свободно распространяющейся в положительном направлении оси  $z$ . При  $z \gg 1/2 \mu$  имеем

$$J_{1\nu}(ke^{-\mu z}) \simeq \left(\frac{k}{2}\right)^{\nu} \frac{e^{-i\mu\nu z}}{\Gamma(1+i\nu)}, \quad J_{-1\nu}(ke^{-\mu z}) \simeq \left(\frac{k}{2}\right)^{-\nu} \frac{e^{i\mu\nu z}}{\Gamma(1-i\nu)},$$

где  $\Gamma(\nu)$  — гамма-функция.

Решения волнового уравнения в пассивной среде и в активной среде при  $z \gg 1/2 \mu$  представим соответственно в виде

$$e_1(z) = C e^{-ip_1 z}, \quad e_2(z \gg 1/2 \mu) = D e^{ip_2 z},$$

где  $p_2 = \frac{\omega}{c} n_2 \cos \theta$ ,  $p_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \theta}$ ,  $\mu\nu = p_2$ .

Воспользовавшись граничными условиями, находим

$$A = 0, \quad B J_{-1\nu}(k) = C, \quad B J'_{-1\nu}(k) = \frac{ip_1}{\mu k} C. \quad (11.1)$$

Из совместности соотношений (11.1) получаем условие генерации

$$p_1 J_{-1\nu}(k) + i\mu k J'_{-1\nu}(k) = 0$$

или, учитывая, что  $J'_{-1\nu}(k) = i\nu/k J_{-1\nu}(k) + J_{-1-1\nu}(k)$ , имеем

$$(p_1 - p_2) J_{-1\nu}(k) + ik\mu J_{-1-1\nu}(k) = 0. \quad (11.2)$$

Воспользовавшись разложением функций Бесселя в ряд, перепишем (11.2) в следующем виде:

$$(p_1 - p_2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{k}{2}\right)^{2m} \Gamma(1-i\nu)}{m! \Gamma(m+1-i\nu)} + 2\mu\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{k}{2}\right)^{2m} \Gamma(-i\nu)}{m! \Gamma(m-i\nu)} = 0. \quad (11.3)$$

Исследуем пороговое соотношение (11.2), считая активный слой тонким. При этом предполагается, что  $|k| \ll 1$ ,  $\rho_1/\mu \approx \rho_2/\mu \ll 1$ . Учитывая эти условия, ограничимся в первом слагаемом в (11.3) членами разложения до  $k^2$  включительно, а во втором слагаемом — членами разложения до  $k^4$  включительно. При этом имеем

$$(p_1 - p_2) \left[ 1 - \frac{(k/2)^2}{1 - i\nu} \right] - 2i\mu \left[ i\nu + \left( \frac{k}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{(k/2)^4}{1 - i\nu} \right] = 0,$$

откуда, учитывая значения величин  $\nu$  и  $k$ , для угла распространения и порогового усиления находим

$$\cos \theta \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{n_1^2/n_2^2 - 1}, \quad \alpha_{\text{пор}} = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} - 1}. \quad (11.4)$$

Эти выражения с точностью до численных коэффициентов совпадают с выражениями для  $\cos \theta$  и  $\alpha_{\text{пор}} l$  ( $l \approx 1/2 \mu$ ), найденными в случае тонкого однородного активного слоя (см. (4.3), а также обсуждение в конце § 4).

Условие применимости сделанных в настоящем параграфе приближений  $|k|^2 \ll 1$  с учетом (11.4) принимает вид (ср. с (4.4))

$$\xi = \frac{2l}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \ll \frac{1}{4\sqrt{2}\pi}.$$

НИИ физики конденсированных сред  
Ереванского государственного  
университета

Поступила 20.III.1980

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ch. J. Kosster. IEEE, J. Quant. Electr., QE-2, 63, (1966).
2. Б. Я. Козан, В. М. Волков, С. А. Лебедев. Письма ЖЭТФ, 16, 144 (1972).
3. Г. Н. Романов, С. С. Шахиджанов. Письма ЖЭТФ, 16, 298 (1972).
4. С. А. Лебедев, В. М. Волков, Б. Я. Козан. Оптика и спектроскопия, 35, 976 (1973).
5. С. А. Лебедев, В. А. Кизель, Б. Я. Козан. Квантовая электроника, 3, 2446 (1976).
6. Б. Б. Бойко, Н. С. Петров, И. Э. Джиладари. ЖПС, 18, 727 (1973).
7. Б. Б. Бойко, И. Э. Джиладари, Н. С. Петров. ЖПС, 22, 545 (1975).
8. Н. С. Петров, Б. Б. Бойко, И. Э. Джиладари. ЖПС, 23, 705 (1975).
9. W. Lukosz, P. P. Herrmann. Optics Commun., 17, 192 (1976).
10. P. R. Callary, C. K. Carniglia. J. Opt. Soc. Am., 66, 775 (1976).
11. R. F. Sybulski, C. K. Carniglia. J. Opt. Soc. Am., 67, 1620 (1977).
12. Л. И. Мандельштам. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике, М., 1972, стр. 435.
13. А. А. Колоколов. Письма ЖЭТФ, 21, 660 (1975).
14. Л. А. Вайнштейн. УФН, 118, 339 (1976).
15. А. А. Колоколов, А. И. Суков. Изв. ВУЗ, Радиофизика, 21, 1309 (1978).
16. И. Ф. Вахненко, Ю. Г. Новохатко, В. М. Филиппов. Квантовая электроника, 2, 2071 (1975).
17. С. А. Раскутич. Радиотехника и электроника, 15, 2527 (1970).
18. E. P. Ippen, C. V. Shank. Digest of Technical Papers, Meeting on Integrated Optics, Las Vegas, 1972.
19. H. Kogelnik, C. V. Shank. Appl. Phys. Lett., 18, 152 (1971).

20. J. E. Bjorkholm, C. V. Shank. IEEE, J. Quant. Electr., QE-8, 833 (1972).  
 21. А. Н. Рыбинов, И. М. Корда. Квантовая электроника, 2, 2626 (1975).  
 22. J. Zeidler. AEU, 26, 533 (1972).  
 23. В. И. Борисов, В. А. Карпенко, В. И. Лебедев. ЖПС, 31, 972 (1979).

**ԱԿՏԻՎ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՔՎԱԶԻԱԼԻՔԱՏԱՐ ԳԵՆԵՐԱՑԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ**

Վ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Գ. Գ. ԶՈԹՅԱՆ, Ա. Վ. ԿԱՐՄԵՆՅԱՆ

*Հետազոտված են բվազիալիքատար ուժիմում աղտիվ դիէլեկտրիկ շերտի (համասեւ և անհամասեւ) գեներացիայի հիմնական բնութագրերը: Զարգացված է այդ ուժիմի գեներացիայի տեսութունը, որտեղ հաշվի են առնված հազեցման էֆեկտները: Բերված են թվային վերլուծության արդյունքը:*

**THE THEORY OF QUASI-WAVEGUIDE GENERATION OF THE ACTIVE LAYER**

V. M. ARUTYUNYAN, G. P. DZHOTYAN, A. V. KARMENYAN

The essential characteristics of the quasi-waveguide regime of active dielectric layer generation (both the homogeneous and inhomogeneous layers) are investigated. The theory of this regime is developed taking into account the saturation effects. The results of numerical analysis are given.