

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ВОЛНОВОДНЫЙ РЕЗОНАТОР С НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Г. А. ГРИГОРЯН

При исследовании дисперсных систем с нестационарными границами возникают большие математические трудности. По-видимому этим объясняется небольшое число работ, посвященных, в частности, трехмерным резонаторам с подвижной границей [1, 2], в которых, однако, исследования проведены приближенными методами. Ниже развивается предложенный ранее метод [3, 4] для точного теоретического исследования колебаний в резонаторах в виде конечного участка цилиндрического волновода, замкнутого двумя проводящими экранами, один из которых движется.

Рассмотрим нестационарный волновой процесс в резонаторе, имеющем вид участка цилиндрического волновода произвольного сечения, ограниченного двумя торцовыми стенками $z = 0$ и $z = l$ (ось z параллельна образующей цилиндра). Резонатор считается без заполнения, а его стенки — идеально проводящими. Пусть в момент времени $t = 0$ стенка $z = l$ начинает двигаться по некоторому закону $z = \bar{l}(\tau)$, $\tau = ct$. Подобная задача приближенно была рассмотрена в [1] в случае, когда поперечное сечение представляет собой прямоугольник.

Поле в резонаторе будем описывать с помощью двух скалярных функций, в качестве которых выберем продольные составляющие электрического и магнитного полей E_z и H_z . Можно показать, что эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} = 0, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1)$$

и граничным условиям на боковых стенках резонатора

$$E_z|_S = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial n}|_S = 0, \quad (2)$$

где $\partial/\partial n$ — производная вдоль нормали к поверхности резонатора S . На торцах резонатора имеют место следующие условия:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}|_{z=0} = 0, \quad H_z|_{z=0} = 0, \quad (3)$$

$$\left\{ \frac{\partial E_z}{\partial z} + \beta \frac{\partial E_z}{\partial \tau} \right\}_{z=\bar{l}(\tau)} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial z} \right\}_{z=\bar{l}(\tau)} = 0. \quad (4)$$

Остальные векторы поля выражаются через E_z и H_z с помощью соотношений

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{H}_{\perp} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \tau} \mathbf{e}_z \right) - \operatorname{grad}_{\perp} \frac{\partial H_z}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}_{\perp} = \operatorname{rot} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \tau} \mathbf{e}_z \right) - \operatorname{grad}_{\perp} \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

где индекс $\perp$ означает поперечный по отношению к оси z вектор, $\mathbf{e}_z$ — орт оси z .

Таким образом, нахождение полей в резонаторе сводится к решению уравнений (1) с граничными условиями (2) и (3). Будем искать E_z и H_z в виде

$$E_z = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(M) \tilde{E}_z(z, \tau), \quad H_z = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\psi}_n(M) \tilde{H}_z(z, \tau), \quad (6)$$

где $\psi_n(M) = \psi_n(x, y)$ и $\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_n(x, y)$ — функции поперечного сечения, удовлетворяющие уравнениям [5]

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_n + \lambda_n^2 \psi_n = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 \hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n^2 \hat{\psi}_n = 0 \quad (7)$$

и в силу (2) условиям

$$\psi_n(M) \Big|_C = 0, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial n} \Big|_C = 0 \quad (8)$$

на контуре C поперечного сечения; $\lambda_n, \hat{\lambda}_n$ — собственные числа.

Скалярные функции $\tilde{E}_z$ и $\tilde{H}_z$ через (6) и (1) будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \lambda_n^2 \right) \tilde{E}_z &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{\lambda}_n^2 \right) \tilde{H}_z &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

с граничными условиями (3) и (4), причем последние остаются в силе при любом выборе поперечных к оси z координат.

Надо отметить, что в указанном резонаторе могут существовать различные структуры полей, определяемых либо $\tilde{E}_z$, либо $\tilde{H}_z$. По принятой терминологии будем классифицировать типы волн следующим образом.

а) E -волны (ТМ-тип), когда $H_z = 0$, $E_z \neq 0$. При этом уравнения для $\mathbf{E}_{\perp}$ и $\mathbf{H}_{\perp}$ примут вид

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}_{\perp} = -\operatorname{grad}_{\perp} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \tau} \right), \quad \nabla_{\perp}^2 \mathbf{H}_{\perp} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \tau} \mathbf{e}_z \right). \quad (10)$$

Подставим (6) в (10) и будем искать $\mathbf{E}_{\perp}$ и $\mathbf{H}_{\perp}$ в виде

$$\mathbf{E}_{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_{\perp} \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n, \quad \mathbf{H}_{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{H}_{\perp} \operatorname{rot} (\psi_n \mathbf{e}_z). \quad (11)$$

Для E_z и H_z получаем следующие выражения:

$$E_z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial z} \text{grad}_z \psi_n, \quad H_z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial \tau} \text{rot}(\psi_n \mathbf{e}_z). \quad (12)$$

б) H -волны (ТЕ-тип), когда $E_z = 0$, $H_z \neq 0$. Тогда из уравнений (5) по аналогии со случаем E -волн для поперечных векторов полей получаем выражения в виде

$$-E_z = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \tau} \text{rot}(\psi_n \mathbf{e}_z), \quad H_z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial z} \text{grad}_z \psi_n. \quad (13)$$

Уравнения (9) с граничными условиями (3) и (4) полностью совпадают с соответствующими уравнениями в [4], если только заменить

$x \rightarrow z$, $\Delta_n \rightarrow \lambda_n$, $\tilde{E}_z \rightarrow U_n^{(1)}$ и $\tilde{H}_z \rightarrow U_n^{(2)}$. Поэтому можно применить метод, развитый в [4], и ввести переменные ξ и η из [4]. Тогда уравнения (9) переходят в следующие:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \lambda_n^2 G(\xi, \eta) \right] \tilde{E}_z = 0, \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \lambda_n^2 G(\xi, \eta) \right] \tilde{H}_z = 0, \quad (14)$$

а граничные условия (3) и (4) преобразуются к виду

$$\frac{\partial E_z}{\partial \eta} = 0, \quad H_z = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \quad \text{и} \quad \eta = \eta_0, \quad (15)$$

причем $\eta = 0$ соответствует $z = 0$, а $\eta = \eta_0$ — значению $z = \bar{l}(\tau)$.

Таким образом, поставленная выше задача в переменных ξ, η сводится к отысканию решений уравнений (14) с граничными условиями (15). Очевидно, что здесь также реализуются три случая разделения переменных, указанные в [4], причем поля в резонаторе строятся в виде стоячих волн. При известных собственных функциях поперечного сечения по формулам (6), (12) и (13) можно вычислить составляющие этих полей, а $\tilde{E}_z$ и $\tilde{H}_z$ позаимствовать из [4], проведя вышеуказанные замены. Заметим, что здесь сохраняется тип волны при движении стенки резонатора.

Институт радиофизики
и электроники АН АрмССР

Поступила 16.XI.1979

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Стеценко. Радиотехника, 7, 71 (1964).
2. В. Н. Красильников. Сб. Проблемы дифракции и распространения волн, ЛГУ, № 8, стр. 43, 1968.
3. К. А. Барсуков, Г. А. Григорян. Радиотехника и электроника, 21, 57 (1976).
4. К. А. Барсуков, Г. А. Григорян. Радиофизика, 19, 603 (1976).
5. А. А. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. Изд. Наука, М., 1977.

Գ. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Զարգացվում է մեթոդ՝ ոչ ստացիոնար սահմաններով ալիքատարային ռեզոնատորների տեսական հետազոտության համար: Ցույց է տրվում, որ խնդրի ճշգրիտ լուծումը հնարավոր է ռեզոնատորի սահմանի շարժման երեք հատուկ դեպքերում:

WAVEGUIDE RESONATOR WITH NON-STATIONARY BOUNDARY

G. A. GRIGORYAN

The method of theoretical investigation of waveguide resonators with non stationary boundaries is developed. The exact solution is shown to exist for three special cases of the motion of resonator boundaries.