Изв. АН Армянской ССР, Физика, 15, 29—34 (1980)

УЧЕТ ПОТЕРЬ В СТЕНКЕ РЕЗОНАТОРА С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Г. А. ГРИГОРЯН

Теоретически исследуется нестационарный одномерный резонатор при наличии потерь на его стенках. Выявлен критерий роста энергии в таком резонаторе.

В работах [1, 2] предложен новый метод исследования одномерных резонаторов с нестационарными границами. Этим вопросам посвящен ряд исследований (см., например, [3] и указанную там литературу). Во всех указанных работах стенки резонатора считались идеально проводящими. Однако реальный резонатор всегда обладает конечной добротностью за счет потерь на стенках резонатора. Ниже показано, что метод, предложенный в [1], позволяет также учесть неидеальность стенок резонатора. Потери на стенках будем учитывать с помощью импедансных условий.

Посмотрим сначала, как можно учесть потери на стенках стационарного резонатора. Пусть стенка резонатора $x = 0$ обладает импедансом ζ_1, а стенка $x = a$ — импедансом ζ_2. Тогда касательные составляющие связаны следующими условиями на этих стенках [4]:

$$E_y = -\zeta_1 H_z \text{ при } x = 0, \; E_y = \zeta_2 H_z \text{ при } x = a. \tag{1}$$

Разные знаки в первом и втором условиях связаны с тем, что при $x = 0$ ось x направлена от стенки, а при $x=a$ — к стенке, т. е. нормаль к стенке меняет направление на обратное.

Будем пренебрегать дисперсией и считать ζ_1 и ζ_2 постоянными вещественными числами. Реализовать подобное импедансное условие можно, например, на границе диэлектрика. Тогда (см. [4]) $\zeta = \dfrac{1+R}{1-R}$, где R — коэффициент отражения от поверхности диэлектрика (для идеально отражающей поверхности $R = -1$). Для волновой функции $U(x, \tau)$, связанной с величинами E и H поля соотношениями

$$E = -\frac{\partial U}{\partial \tau}, \; H = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{2}$$

(для определенности предполагается, что вектор E направлен вдоль оси y), импедансные условия запишутся в виде

$$\left\{\frac{\partial U}{\partial \tau} - \zeta_1 \frac{\partial U}{\partial x}\right\}_{x=0} = 0, \; \left\{\frac{\partial U}{\partial \tau} + \zeta_2 \frac{\partial U}{\partial x}\right\}_{x=a} = 0, \tag{3}$$

причем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = 0. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) имеет вид

$$U = e^{i\alpha\tau}(Ae^{i\alpha x} - Be^{-i\alpha x}). \tag{5}$$

Подстановка (5) в граничные условия (3) дает следующую связь между коэффициентами A и B:

$$A(1-\zeta_1) + B(1+\zeta_1) = 0, \; Ae^{i\alpha a}(1+\zeta_2) + Be^{-i\alpha a}(1-\zeta_2) = 0. \tag{6}$$

Условие совместности уравнений (6) приводит к следующему дисперсионному соотношению:

$$i\sin\alpha a + (\zeta_1+\zeta_2)\cos\alpha a + i\zeta_1\zeta_2\sin\alpha a = 0. \tag{7}$$

Будем считать импеданс малым. Тогда с точностью до членов второго порядка малости (7) дает следующее выражение для α

$$\alpha = i\frac{\zeta_1+\zeta_2}{a} + \frac{\pi n}{a}, \; n = 0, \; \pm 1, \; \pm 2, \cdots, \tag{8}$$

и (5) с учетом (8) преобразуется к виду

$$U = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left\{ (1+\zeta_1) e^{\left(i\frac{\pi n}{a} - \frac{\zeta_1+\zeta_2}{a}\right)(\tau+x)} - (1-\zeta_1) e^{\left(i\frac{\pi n}{a} - \frac{\zeta_1+\zeta_2}{a}\right)(\tau-x)} \right\}, \tag{9}$$

где коэффициенты a_n определяются из начальных условий задачи.

Итак, наличие потерь на стенках резонатора несколько искажает форму стоячей волны и вызывает затухание всех мод резонатора с характерным временем $t_0 = \frac{\tau_0}{c} = \frac{a}{2c(\zeta_1+\zeta_2)}$; в этом случае добротность резонатора оказывается равной [5]

$$Q_n = \frac{a\omega_n}{4c(\zeta_1+\zeta_2)}, \; \omega_n = \frac{\pi n}{a}. \tag{10}$$

Заметим, что наличие потерь на стенках меняет соотношение между амплитудами прямой и обратной волн (9), причем если для затухания существенна величина потерь на обеих стенках, то изменение амплитуды связано лишь с потерями на левой границе $x = 0$. Например, если левая стенка идеально проводящая, а правая обладает потерями, то

$$U(x, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left\{ e^{\left(i\frac{\pi n}{a} - \frac{\zeta}{a}\right)(\tau+x)} - e^{\left(i\frac{\pi n}{a} - \frac{\zeta}{a}\right)(\tau-x)} \right\}. \tag{11}$$

Перейдем теперь к рассмотрению нестационарного резонатора с движущейся по закону $x=\bar{a}(\tau)$ правой границей. В этом случае нетрудно получить соответствующие граничные условия. Действительно, если преобразовать условие (1) из системы координат, связанной со стенкой, в лабораторную систему, то получим

$$\left\{\frac{\partial U}{\partial \tau} - \zeta_1 \frac{\partial U}{\partial x}\right\}_{x=0} = 0, \; \left\{(1+\zeta_2)\frac{\partial U}{\partial \tau} + (\zeta_2+\beta)\frac{\partial U}{\partial x}\right\}_{x=\bar{a}} = 0, \tag{12}$$

где $\beta = \dot{\bar{a}}(\tau)$ (см. [1]).

Решение уравнения (4) при граничных условиях (12) может быть получено с помощью развитого в [1] метода. Для этого произведем в (12) замену переменных согласно формуле (7) из [1]. В новых переменных ξ, η условия (12) запишутся в виде

$$\left\{\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \tau}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \tau}-\zeta_1\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}-\zeta_1\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right\}_{\eta=0}=0,$$

$$\left\{\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}+\beta\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)+\frac{\partial U}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}+\beta\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\right. \tag{13}$$

$$\left.+\zeta_2\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(\beta\frac{\partial \xi}{\partial \tau}+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)+\zeta_2\frac{\partial U}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\beta+\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right\}_{\eta=\eta_0}=0.$$

Но из [1] известно, что ξ есть четная функция от x, поэтому $\partial\xi/\partial x=0$ при $x=0$ (или, что то же, $\eta=0$). Кроме того, нетрудно показать, что имеют место соотношения

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial \tau},\ \frac{\partial \xi}{\partial \tau}=\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{14}$$

с помощью которых коэффициенты в скобках в (13) при $\partial U/\partial\xi$ и $\partial U/\partial\eta$ можно свести к полным производным по времени:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\beta\frac{\partial \xi}{\partial \tau}=\frac{\partial \eta}{\partial \tau}+\beta\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{d\eta}{d\tau},\ \frac{\partial \xi}{\partial \tau}+\beta\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial x}+\beta\frac{\partial \eta}{\partial \tau}=\frac{d\xi}{d\tau}. \tag{15}$$

На движущейся границе значение η равно η_0 и не зависит от времени; поэтому $\left.\dfrac{d\eta}{d\tau}\right|_{\eta=\eta_0}=0$ и, следовательно, граничные условия в новых переменных запишутся в виде

$$\left\{\frac{\partial U}{\partial \xi}-\zeta_1\frac{\partial U}{\partial \eta}\right\}_{\eta=0}=0,\ \left\{\frac{\partial U}{\partial \xi}+\zeta_2\frac{\partial U}{\partial \eta}\right\}_{\eta=\eta_0}=0, \tag{16}$$

причем уравнение (4) в переменных ξ, η остается инвариантным. Итак, вышеуказанная замена переменных оставляет инвариантными как граничные условия, так и волновое уравнение, и эта задача полностью совпадает с рассмотренной выше задачей для стационарного резонатора. Это дает возможность сразу написать решение по аналогии с (9):

$$U=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left\{(1+\zeta_1)\,e^{\left(i\frac{\pi n}{\eta_0}-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\eta_0}\right)(\xi+\eta)}-(1-\zeta_1)\,e^{\left(i\frac{\pi n}{\eta_0}-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\eta_0}\right)(\xi-\eta)}\right\}. \tag{17}$$

Переход к первоначальным переменным можно осуществить с помощью функции ψ, обратной к F (см. [1]), для которой легко показать, что

$$\xi+\eta=\psi(\tau+x),\ \xi-\eta=\psi(\tau-x),$$

$$\eta_0=\frac{1}{2}[\psi(\tau+\bar{a})-\psi(\tau-\bar{a})]. \tag{18}$$

Подстановка (18) в (17) дает

$$U=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left\{(1+\zeta_1)e^{\left(i\frac{\pi n}{\eta_0}-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\eta_0}\right)\psi(\tau+x)}-(1-\zeta_1)e^{\left(i\frac{\pi n}{\eta_0}-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\eta_0}\right)\psi(\tau-x)}\right\}. \quad (19)$$

При «медленном» движении стенки резонатора, когда $\bar{a}(\tau)/\tau \ll 1$, т. е. когда перемещение стенки незначительно по сравнению с путем, пройденным световой волной за время τ, выражение (19) упрощается. В этом случае из (18) легко показать, что

$$\psi(\tau\pm x)=\psi(\tau)\pm\eta_0\frac{x}{\bar{a}(\tau)}-\eta_0\frac{\dot{\bar{a}}(\tau)}{\bar{a}^2(\tau)}\frac{x^2}{2}. \quad (20)$$

С помощью последнего выражения (19) можно преобразовать к виду

$$U=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\left(i\frac{\pi n}{\eta_0}-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\eta_0}\right)\psi(\tau)}\left\{(1+\zeta_1)e^{\left(i\frac{\pi n}{\bar{a}}-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\bar{a}}\right)x}-\right.$$

$$\left.-(1-\zeta_1)e^{\left(i\frac{\pi n}{\bar{a}}-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\bar{a}}\right)x}\right\}. \quad (21)$$

Затухание поля в резонаторе определяется множителем $\exp\left\{-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\eta_0}\psi(\tau)\right\}$. Характерное время τ_0 затухания поля в резонаторе определим из условия $\psi(\tau_0)\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\eta_0}=1$, откуда

$$\tau_0=F\left(\frac{\eta_0}{\zeta_1+\zeta_2}\right). \quad (22)$$

Например, для линейного закона движения стенки [1] имеем

$$\tau_0=\frac{a}{\beta}\left(e^{\frac{\eta_0}{\zeta_1+\zeta_2}}-1\right), \quad (23)$$

и при малых β $\tau_0=\frac{a}{\zeta_1+\zeta_2}$ и не зависит от β.

В заключение остановимся на возможности получения нарастающих полей в резонаторе с движущейся границей. Изменение энергии в резонаторе происходит за счет потоков к обеим стенкам. Поток, направленный к стенке $x=0$, очевидно, равен

$$S_1=\frac{c}{4\pi}(EH)\Big|_{x=0}=\frac{c}{4\pi}\zeta_1 H^2\Big|_{x=0}. \quad (24)$$

Поток, направленный к стенке, которая движется, есть

$$S_2=\frac{c}{4\pi}(EH)\Big|_{x=\bar{a}}$$

и в силу (12)

$$S_2 = \frac{c}{4\pi}\frac{\zeta_2 + \dot{\overline{a}}}{1+\zeta_2\dot{\overline{a}}}H^2\Big|_{x=\overline{a}}. \tag{25}$$

Если считать скорость стенки достаточно малой и $\dot{\overline{a}} \sim \zeta_1, \zeta_2$, то в (24) и (25) можно брать значения полей нестационарного резонатора [1, 2]:

$$H(0, \tau) = -\sum_{n=0}^{\infty} 4\frac{\pi n}{\eta_0}|a_n|\psi'(\tau)\sin\left[\frac{\pi n}{\eta_0}\psi(\tau)+\delta_n\right],$$

$$H(\overline{a}, \tau) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{\pi n}{\eta_0}|a_n|[\psi'(\tau+\overline{a})+\psi'(\tau-\overline{a})]\sin\left[\frac{\pi n}{\eta_0}\psi(\tau+\overline{a})+\delta_n\right]$$

и пренебречь в (25) произведением $\zeta_2\dot{\overline{a}}$.

Полная утечка энергии через единичную площадь на стенках резонатора будет, очевидно, суммой $S_1 + S_2$. Воспользовавшись условием «медленного» движения стенки, получим

$$\frac{dw}{dt} = -S_1 - S_2 = -\frac{c}{4\pi}(\zeta_1+\zeta_2+\dot{\overline{a}})H^2(0, \tau), \tag{26}$$

где w — энергия в объеме резонатора с единичным основанием на стенках. Рост энергии в резонаторе, очевидно, возможен при условии

$$\dot{\overline{a}} > -(\zeta_1+\zeta_2). \tag{27}$$

Импедансы ζ_1 и ζ_2 при отражении волны от металлического экрана порядка 10^{-6} для длинных радиоволн, порядка 10^{-4} в сантиметровом диапазоне, а на оптических частотах порядка 10^{-2}, так что скорость стенки должна быть достаточно большой для реализации «схлопывания». Так, в сантиметровом диапазоне скорость стенки должна быть $v \sim c\zeta = 3\cdot 10^4$ *м/с*, если не принимать мер по повышению отражательной способности стенок.

Институт радиофизики
и электроники АН АрмССР

Поступила 17.VII.1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. А. Барсуков, Г. А. Григорян*. Радиотехника и электроника, 21, 57 (1976).
2. *К. А. Барсуков, Г. А. Григорян*. Изв. вузов, Радиофизика, 19, 603 (1976).
3. *А. И. Весницкий*. Изв. вузов, Радиофизика, 14, 1432 (1971).
4. *М. А. Миллер, В. И. Таланов*. Изв. вузов, Радиофизика, 4, 795 (1961).
5. *Л. А. Вайнштейн*. Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, М., 1957.

ԿՈՐՈՒՍՏՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄԸ ՇԱՐԺՎՈՂ ՍԱՀՄԱՆՈՎ ՌԵԶՈՆԱՏՈՐԻ ՊԱՏՈՒՄ

Գ. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Տեսականորեն ուսումնասիրված է ոչ ստացիոնար ռեզոնատորը նրա պատերում կորուստների առկայության դեպքում։ Բացահայտված է այդպիսի ռեզոնատորում էներգիայի աճի հայտանիշը։

ALLOWANCE FOR LOSSES IN A WALL OF A CAVITY HAVING A MOVING BOUNDARY

G. A. GRIGORYAN

Theoretical investigation of a nonstationary cavity with due regard for losses in its wall is carried out using the impedance conditions. The criterion for the increase of energy in such a cavity is obtained.