

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ ПРИ ПРОЛЕТЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

Л. М. МОВСИСЯН

Найдены векторный и скалярный потенциалы при пролете точечного заряда со скоростью света между двумя идеально проводящими параллельными плоскостями. Определены составляющие электромагнитного поля.

Изучение возбуждения электромагнитного поля движущимися зарядами при различных граничных условиях представляет большой практический и теоретический интерес. Целый ряд работ [1—6] посвящен рассмотрению вопросов возбуждения электромагнитных волн при пролете точечного заряда через резонатор или цепочку связанных резонаторов. В работах [2, 3] рассмотрена задача о распространении волн в цепочке связанных резонаторов и получены выражения для собственных частот и отношений амплитуд, вычислены фазовая и групповая скорости распространения волны E_0 . В [4, 5] вычислена энергия, излучаемая заряженным пучком, при пролете через резонатор. Исследованы условия распространения электромагнитных волн в гофрированных волноводах, получены дисперсионные уравнения и найдены формулы для интенсивности излучения. В работе [6] получено соотношение, определяющее спектр излученных частот. Общий метод решения таких задач заключается в том, что поля рассматриваются в виде бесконечных рядов, что дает возможность удовлетворить граничным условиям.

Целью настоящей работы является нахождение электромагнитного поля между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями при пролете точечного заряда Q со скоростью света перпендикулярно плоскостям. Выберем систему координат с осью z вдоль движения заряда. Тогда плотность зарядов и плотность тока между плоскостями можно представить в виде

$$\rho = Q \delta(x) \delta(y) \delta(z - ct) \quad (0 < ct < b), \quad (1)$$

$$\mathbf{j} = \rho c \mathbf{z}_0,$$

где δ — дельта-функция, $\mathbf{z}_0$ — единичный вектор в направлении z , b — расстояние между плоскостями.

Нахождение полей начнем с определения векторного и скалярного потенциалов. Они удовлетворяют волновым уравнениям

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho \quad (2)$$

и граничным условиям

$$A_x = 0, A_y = 0, \Phi = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = b.$$

Векторный и скалярный потенциалы будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{\lambda} q_{\lambda}(t) \mathbf{A}_{\lambda}(x, y, z), \\ \Phi &= \sum_{\lambda} r_{\lambda}(t) \Phi_{\lambda}(x, y, z), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{A}_{\lambda}$ и Φ_{λ} — совокупности ортогональных функций, зависящих только от координат и удовлетворяющих уравнениям

$$\Delta \mathbf{A}_{\lambda} + \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \mathbf{A}_{\lambda} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A}_{\lambda} = 0, \quad (4)$$

$$\Delta \Phi_{\lambda} + \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \Phi_{\lambda} = 0.$$

Собственные функции $\mathbf{A}_{\lambda}$ и Φ_{λ} нормированы следующим образом:

$$\int \mathbf{A}_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda'}^* dV = \int \Phi_{\lambda} \Phi_{\lambda'}^* dV = \delta(k_x - k_x') \delta(k_y - k_y') \delta_{mm'}, \quad (5)$$

где m — целое число, k_x и k_y характеризуют собственные функции с индексом $\lambda \equiv \left(k_x, k_y, \frac{m\pi}{b}\right)$.

С учетом (4) и (5) для собственных функций находим

$$\begin{aligned} A_{\lambda x} &= \frac{-imk_x c}{k\omega_{\lambda} b \sqrt{2} b} e^{i(k_x x + k_y y)} \sin \frac{m\pi}{b} z, \\ A_{\lambda y} &= \frac{-imk_y c}{k\omega_{\lambda} b \sqrt{2} b} e^{i(k_x x + k_y y)} \sin \frac{m\pi}{b} z, \\ A_{\lambda z} &= \frac{kc \sqrt{\varepsilon_m}}{\pi\omega_{\lambda} \sqrt{2} b} e^{i(k_x x + k_y y)} \cos \frac{m\pi}{b} z, \\ \Phi_{\lambda} &= \frac{1}{\pi \sqrt{2} b} e^{i(k_x x + k_y y)} \sin \frac{m\pi}{b} z, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad \frac{\omega_{\lambda}}{c} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}, \\ \varepsilon_m &= \begin{cases} 1/2 & \text{при } m = 0 \\ 1 & \text{при } m \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Для определения $q_{\lambda}(t)$ подставим в (2) сумму (3). Умножив обе части полученного уравнения на $\mathbf{A}_{\lambda}^*$ и проинтегрировав по объему, будем иметь

$$\ddot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q = 4\pi c \int \mathbf{j} \mathbf{A}_{\lambda}^* dV. \quad (7)$$

Подставляя сюда выражение для плотности тока, находим

$$q_{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{4 Qc}{k\omega_{\lambda}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2b}} \left[\cos \frac{m\pi ct}{b} - \cos \omega_{\lambda} t \right] & \text{при } 0 < ct < b, \\ \frac{4 Qc}{k\omega_{\lambda}} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2b}} \left[(-1)^m \cos \frac{\omega_{\lambda}}{c} (ct-b) - \cos \omega_{\lambda} t \right] & \text{при } ct > b. \end{cases} \quad (8)$$

Аналогичным образом для $r_{\lambda}(t)$ получаем

$$r_{\lambda}(t) = \frac{4\pi c^2}{\omega_{\lambda}^2} \int \rho \Phi_{\lambda}^* dV = \begin{cases} \frac{4 Qc^2}{\omega_{\lambda}^2 \sqrt{2b}} \sin \frac{m\pi ct}{b} & \text{при } 0 < ct < b, \\ 0 & \text{при } ct > b. \end{cases} \quad (9)$$

Выразим электрическое и магнитное поля через векторный и скалярный потенциалы:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= - \sum_{\lambda} [r_{\lambda} \text{grad } \Phi_{\lambda}] - \frac{1}{c} \sum_{\lambda} [\dot{q}_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda}], \\ \mathbf{H} &= \sum_{\lambda} q_{\lambda} [\nabla \mathbf{A}_{\lambda}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из осевой симметрии задачи следует, что только составляющие полей E_z , E_r и B_{φ} отличны от нуля.

В решение волнового уравнения в цилиндрической системе координат входит $J_0(kr)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Выражение для продольной составляющей электрического поля при $0 < ct < b$ имеет вид

$$E_z = \frac{2 Q \sigma(ct-r)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \delta(z - \sqrt{c^2 t^2 - r^2}), \quad (11)$$

где $\sigma(ct-r)$ — единичная функция,

$$\sigma(ct-r) = \begin{cases} 1 & \text{при } ct > r \\ 0 & \text{при } ct < r. \end{cases}$$

Здесь учтено, что (см. [7], формулы (6.677), (6.737) и (8.464)).

$$\int_0^{\infty} k J_0(kr) \frac{\sin \sqrt{k^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} ct}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}} dk = \cos \frac{m\pi \sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{b} \sigma(ct-r).$$

При $ct > b$ получаем

$$\begin{aligned} E_z &= - \frac{2 Q \sigma(ct-r)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(z - \sqrt{c^2 t^2 - r^2} + 2nb) + \\ &+ \delta(z + \sqrt{c^2 t^2 - r^2} - 2nb)] + \frac{2 Q \sigma(ct-b-r)}{\sqrt{(ct-b)^2 - r^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta[z - \\ &- \sqrt{(ct-b)^2 - r^2} + (2n+1)b] + \delta[z + \sqrt{(ct-b)^2 - r^2} - (2n+1)b]]. \end{aligned} \quad (12)$$

Для радиальной составляющей электрического поля имеем:
при $0 < ct < b$

$$E_r = \begin{cases} \frac{2Q\sigma(ct-r)}{r} \delta(z - \sqrt{c^2t^2 - r^2}) & \text{при } r \neq 0 \\ 0 & \text{при } r = 0, \end{cases} \quad (13)$$

а при $ct > b$

$$E_r = \frac{2Q\sigma(ct-r)}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(z - \sqrt{c^2t^2 - r^2} + 2nb) - \delta(z + \sqrt{c^2t^2 - r^2} - 2nb)] - \\ - \frac{2Q\sigma(ct-b-r)}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\delta[z - \sqrt{(ct-b)^2 - r^2} + (2n+1)b] - \\ - \delta[z + \sqrt{(ct-b)^2 - r^2} - (2n+1)b]\}. \quad (14)$$

Аналогичные расчеты для магнитного поля дают:
при $0 < ct < b$

$$B_r = \frac{2Qct\sigma(ct-r)}{r\sqrt{c^2t^2 - r^2}} \delta(z - \sqrt{c^2t^2 - r^2}), \quad (15)$$

а при $ct > b$

$$B_r = \frac{2Qct\sigma(ct-r)}{r\sqrt{c^2t^2 - r^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(z + \sqrt{c^2t^2 - r^2} - 2nb) + \delta(z - \sqrt{c^2t^2 - r^2} + \\ + 2nb)] - \frac{2Qct\sigma(ct-b-r)}{r\sqrt{(ct-b)^2 - r^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\delta[z + \sqrt{(ct-b)^2 - r^2} + (2n+1)b] + \\ + \delta[z - \sqrt{(ct-b)^2 - r^2} - (2n+1)b]\}. \quad (16)$$

При пролете точечного заряда в пространстве между двумя плоскостями на первой плоскости индуцируются заряды и токи. Эти заряды движутся радиально по поверхности со скоростью света. Поверхностные токи и заряды с пролетающим зарядом дают результирующее поле в виде δ -функции на поверхности сферы $c^2t^2 = r^2 + z^2$. Когда заряд достигает второй плоскости, то и на ней возникают поверхностные заряды и токи. При $ct > b$ поле представляется в виде суперпозиции отраженных от плоскостей и распространяющихся вдоль радиуса волн.

Ереванский государственный
университет

Поступила 23.V.1979

ЛИТЕРАТУРА

1. E. U. Condon. J. Appl. Phys., 12, 129 (1941).
2. В. В. Владимирский. ЖТФ, 17, 1269 (1947).
3. В. В. Владимирский. ЖТФ, 17, 1277 (1947).
4. О. А. Колпаков, В. И. Котов. ЖТФ, 34, 1387 (1964).
5. О. А. Колпаков, В. И. Котов, Ом-Сан-Ха. ЖТФ, 35, 1072 (1965).
6. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Я. Б. Файнберг. ЖТФ, 25, 2526 (1955).
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԵԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԸ ԵՐԿՈՒ ԶՈՒԳԱՂԵՌ ԷԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ՄԻՋԵՎ ԿԵՏԱՅԻՆ ԼԻՑՔԻ ԱՆՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Լ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Իդեալական հաղորդականությամբ օժտված երկու դուգաճևու հարթությունների միջև լույսի արագությամբ կատալին լիցքի անցման դեպքում ստացված են վեկտորական և սկալար պո-տենցիալները: Որոշված են էլեկտրամագնիսական դաշտի բաղադրիչները:

THE ELECTROMAGNETIC FIELD INDUCED BY A POINT
CHARGE IN FLIGHT BETWEEN TWO PARALLEL PLATES

L. M. MOVSIKYAN

The vector and scalar potentials arising at the flight of a point charge with the velocity of light between two parallel, perfectly conducting plates are obtained. The components of the electromagnetic field are found.