Изв. АН Армянской ССР, Физика, 15, 3—8 (1980)

О КАЛИБРОВОЧНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ НА КЛАССИЧЕСКОЙ ЭКСТРЕМАЛИ БЕЗ ИСТОЧНИКОВ

И. А. БАТАЛИН, Г. К. САВВИДИ

Дано явное доказательство калибровочной инвариантности эффективного действия для полей, удовлетворяющих классическим уравнениям движения без источников в теории Янга-Миллса.

1. Введение

Калибровочная инвариантность эффективного действия на точной экстремали с помощью тождеств Уорда была доказана в [1], а в явном виде на однопетлевом уровне — в [2, 3]. В настоящей работе дано явное доказательство калибровочной инвариантности эффективного действия для полей, удовлетворяющих *классическим* уравнениям движения без источников в неабелевых калибровочных теориях. Основной результат заключается в следующем. Как правило, квантовые поправки вычисляются на каком-либо решении φ_0 классического уравнения $S_{,i}(\varphi_0) = 0$, и, казалось бы, необходимо вычислить $\hbar\,\Gamma^{(1)}(\varphi_0) + \hbar^2\,\Gamma^{(2)}(\varphi_0) + \cdots$, где $\Gamma^{(1)}$ $\Gamma^{(2)}$ и т. д.—квантовые поправки, которые представляют собой совокупность одночастично неприводимых диаграмм. В работе же показано, что на самом деле необходимо вычислить $\hbar\Gamma^{(1)}(\varphi_0) + \hbar^2\{\Gamma^{(2)}(\varphi_0) + \frac{1}{2}\Gamma,{}_i^{(1)}(\varphi_0) \times \Delta^{ij}(\varphi_0)\,\Gamma,{}_j^{(1)}(\varphi_0)\}$. Неожиданным является появление второго слагаемого в фигурных скобках, которое представляет собой совокупность одночастично *приводимых* диаграмм. Затем явным вычислением мы убедились в том, что именно это последнее выражение является калибровочно инвариантной величиной.

2. Определения

Как и в [4], нами будут использоваться два типа конденсированных индексов, объединяющих дискретные и непрерывные координаты пространства—времени: малые латинские индексы относятся к лагранжевым переменным калибровочного поля φ^i, а малые греческие — к параметрам калибровочной группы. Классическое действие $S(\varphi)$ инвариантно относительно бесконечно малых калибровочных преобразований

$$\delta\varphi^i = R^i_\alpha(\varphi)\,\delta\xi^\alpha,$$

следовательно

$$S,{}_i(\varphi)\,R^i_\alpha(\varphi) = 0,$$

$$S,{}_{ij}(\varphi)\,R^i_\alpha(\varphi) + S,{}_i(\varphi)\,R^i_{\alpha,j}(\varphi) = 0$$

и т. д., где функциональные производные по полю обозначены с помощью запятой.

На классической экстремали

$$S_{,i}(\varphi_0) = 0$$

эти соотношения имеют вид

$$R^i_\alpha(\varphi_0)\, S_{,i}(\varphi_0) = 0, \tag{1}$$

$$R^i_\alpha(\varphi_0)\, S_{,ij}(\varphi_0) = 0, \tag{2}$$

$$R^i_\alpha S_{,ijk} + R^i_{\alpha,k} S_{,ij} + R^i_{\alpha,j} S_{,ik} = 0, \tag{3}$$

$$R^i_\alpha S_{,ijkl} + R^i_{\alpha,l} S_{,ijk} + R^i_{\alpha,k} S_{,ijl} + R^i_{\alpha,j} S_{,ikl} = 0,$$

$$R^i_{\alpha,m} S_{,ijkl} + R^i_{\alpha,l} S_{,ijkm} + R^i_{\alpha,k} S_{,ijlm} + R^i_{\alpha,j} S_{,iklm} = 0;$$

при этом мы учли, что действие содержит поле в степени не выше четвертой и что $R^i_{\alpha,jk} = 0$.

Алгебра Ли калибровочной группы G в терминах величины $R^i_\alpha(\varphi)$ записывается в виде

$$R^i_{\alpha,j} R^j_\beta - R^i_{\beta,j} R^j_\alpha \equiv R^i_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где $C^\gamma_{\alpha\beta}$ — структурные константы группы, удовлетворяющие тождеству Якоби

$$C^\delta_{\alpha\varepsilon} C^\varepsilon_{\beta\gamma} + C^\delta_{\beta\varepsilon} C^\varepsilon_{\gamma\alpha} + C^\delta_{\gamma\varepsilon} C^\varepsilon_{\alpha\beta} = 0.$$

Мы также предположим, как обычно, что

$$\begin{aligned} R^i_{\alpha,i} &= 0, \\ C^\beta_{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Исходное выражение для производящего функционала есть

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar} Z\right\} = N^{-1} \int D\varphi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[S(\varphi) + \frac{1}{2}\Psi^\alpha \varkappa_{\alpha\beta} \Psi^\beta + J_k \varphi^k\right] + \right.$$

$$\left. + \operatorname{Sp}\ln\left[R^k_\alpha \Psi^\beta_{,k}\right]\right\}, \tag{6}$$

где $\Psi^\alpha(\varphi)$ — калибровочная функция. Используя (5), можно получить следующее выражение для изменения функционала Z при вариации калибровки Ψ:

$$\delta_\Psi \exp\left\{\frac{i}{\hbar} Z\right\} = \frac{i}{\hbar} J_k R^k_\alpha D^\alpha_\beta\, \delta\Psi^\beta \Big|_{\varphi = \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} Z\right\}, \tag{7}$$

где

$$R^k_\alpha \Psi^\beta_{,k} D^\gamma_\beta = -\delta^\gamma_\alpha.$$

Введем производящий функционал вершинных функций Грина $\Gamma^{(n)}$ (эффективное действие):

$$\Gamma = Z - J_k \varphi^k, \tag{8}$$

причем J_k должно быть выражено через φ^k с помощью уравнения

$$\frac{\delta Z}{\delta J_k} = \varphi^k. \tag{9}$$

Рассмотрим полное изменение функционала $\Gamma(\varphi)$ при вариации калибровки

$$\delta_\Psi \Gamma = \delta_\Psi Z + \frac{\delta Z}{\delta J_k} \delta_\Psi J_k - (\delta_\Psi J_k) \varphi^k. \tag{10}$$

Последние два члена в (10) компенсируют друг друга в силу (9) и мы имеем

$$\delta_\Psi \Gamma(\varphi) = \delta_\Psi Z(J)|_{J = J(\varphi, \psi)}.$$

Явная вариация $\delta_\Psi Z$ дается (7) и исчезает при $J_k = 0$. Так как по определению (8)

$$\Gamma,_l(\varphi) = -J_l,$$

то

$$\delta_\Psi \Gamma(\varphi) = 0,$$

если φ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma,_l(\varphi) = 0. \tag{11}$$

3. Явное доказательство калибровочной инвариантности

Получим теперь разложение $\Gamma(\varphi)$ на точной экстремали (11) по степеням $\hbar$ (т. е. по числу петель). С этой целью представим (8) в виде разложения по степеням $\hbar$:

$$\Gamma(\varphi) = \Gamma_0(\varphi) + \hbar \Gamma^{(1)}(\varphi) + \hbar^2 \Gamma^{(2)}(\varphi) + \cdots. \tag{12}$$

Далее разложив в ряд решение уравнения (11):

$$\varphi = \varphi_0 + \hbar \varphi^{(1)} + \hbar^2 \varphi^{(2)} + \cdots \tag{13}$$

и подставив его в (11), находим

$$\Gamma_{0},_l(\varphi_0) = 0, \tag{14}$$

$$\Gamma_{0},_{lk}(\varphi_0)\, \varphi^{(1)k} + \Gamma,_l^{(1)}(\varphi_0) = 0 \tag{15}$$

и т. д.

Эти соотношения позволяют выразить члены разложения (13) через φ_0. Для $\Gamma(\varphi)$ на точной экстремали, выраженной через φ_0, получаем

$$\Gamma(\varphi)|_{(11)} = \Gamma_0(\varphi_0) + \hbar \Gamma^{(1)}(\varphi_0) + \\ + \hbar^2 \left\{ \Gamma^{(2)}(\varphi_0) + \frac{1}{2} \Gamma,_i^{(1)}(\varphi_0)\, \Delta^{ij}(\varphi_0)\, \Gamma,_j^{(1)}(\varphi_0) \right\} + \cdots, \tag{16}$$

где по определению

$$\Gamma_{0,\,ik}(\varphi_0)\,\Delta^{kj}(\varphi_0) = -\,\delta_i^j. \tag{17}$$

Неожиданным является появление второго члена в фигурных скобках (16), который представляет собой совокупность одночастично *приводимых* диаграмм. В этом можно убедиться, подставляя (12), а также разложение для Z

$$Z = Z_0 + \hbar Z^{(1)} + \hbar^2 Z^{(2)} + \cdots$$

в (8) и (9).

Представляет интерес явно убедиться, что каждый член в (16) не зависит от калибровки. Используя метод стационарной фазы применительно к (6), для коэффициентов разложения (16) находим

$$\Gamma_0(\varphi_0) = S(\varphi_0) + \frac{1}{2}\Psi^\alpha \varkappa_{\alpha\beta}\Psi^\beta,$$

$$\Gamma^{(1)}(\varphi_0) = \frac{i}{2}\,\mathrm{Sp}\ln\left\{S,_{ij} + \frac{1}{2}\Psi,_i^\alpha \varkappa_{\alpha\beta}\Psi,_j^\beta\right\} - i\,\mathrm{Sp}\ln\{R_\alpha^k \Psi,_k^\beta\}, \tag{18}$$

$$\Gamma^{(2)}(\varphi_0) = -\frac{1}{8}S,_{ijkl}\Delta^{ij}\Delta^{kl} - \frac{1}{12}S,_{ijk}S,_{lmn}\Delta^{il}\Delta^{jm}\Delta^{kn} +$$

$$+\frac{1}{2}D_\alpha^\gamma D_{\gamma,\,i}^{-1\,\alpha}\Delta^{ij}D_\rho^\delta D_{\delta,\,j}^{-1\,\rho};$$

$$\frac{1}{2}\Gamma,_i^{(1)}(\varphi_0)\,\Delta^{ij}(\varphi_0)\,\Gamma,_j^{(1)}\varphi_0 = -\frac{1}{8}S,_{ijk}S,_{lmn}\Delta^{ij}\Delta^{kl}\Delta^{mn} -$$

$$-\frac{1}{2}S,_{ijk}\Delta^{ij}\Delta^{kl}D_\alpha^\beta D_{\beta,\,l}^{-1\,\beta} - \frac{1}{2}D_\alpha^\beta D_{\beta,\,i}^{-1\,\alpha}\Delta^{ij}D_\rho^\delta D_{\delta,\,j}^{-1\,\rho}.$$

Докажем, что $\Gamma_0(\varphi_0)$ не зависит от Ψ. Имеем

$$\delta_\Psi\Gamma_0(\varphi_0) = \Gamma_{0,\,i}\,\delta\varphi_0^i + \delta\Psi^\alpha\varkappa_{\alpha\beta}\Psi^\beta = \delta\Psi^\alpha\varkappa_{\alpha\beta}\Psi^\beta.$$

Запишем уравнение (14) в явном виде

$$S,_i(\varphi_0) + \Psi,_i^\alpha(\varphi_0)\varkappa_{\alpha\beta}\Psi^\beta(\varphi_0) = 0. \tag{19}$$

В силу (1) при свертывании (19) с R_γ^i имеем

$$D^{-1\,\alpha}_{\ \gamma}\varkappa_{\alpha\beta}\Psi^\beta = 0,$$

т. е.

$$\Psi^\beta(\varphi_0) = 0, \tag{20}$$

так что $\delta_\Psi\Gamma_0(\varphi_0) = 0$. Таким образом, $\Gamma_0(\varphi_0)$ не зависит от Ψ.

Рассмотрим для $\Gamma^{(1)}(\varphi_0)$

$$\delta_\Psi\Gamma^{(1)}(\varphi_0) = \Gamma,_i^{(1)}\delta_\Psi\varphi_0^i + \bar{\delta}_\Psi\Gamma^{(1)}, \tag{21}$$

где $\bar{\delta}_\Psi$ обозначает вариацию явной зависимости $\Gamma^{(1)}$ от Ψ.

Для дальнейших вычислений нам понадобятся два соотношения. Умножая уравнение (17) для Δ^{il}

$$[S_{,ij} + \Psi,{}_i^\alpha \varkappa_{\alpha\beta} \Psi,{}_j^\beta] \Delta^{jk} = \delta_i^k \tag{22}$$

на R_γ^i и используя (2), получаем

$$\varkappa_{\alpha\beta} \Psi,{}_j^\beta \Delta^{jk} = D_\alpha^\gamma R_\gamma^k. \tag{23}$$

Чтобы найти изменение экстремали $\delta_\Psi \varphi_0^i$, проварьируем уравнение движения (19):

$$S_{,ij} \delta_\Psi \varphi_0^j + \Psi,{}_i^\alpha \varkappa_{\alpha\beta} \Psi,{}_j^\beta \delta_\Psi \varphi_0^j + \delta\Psi,{}_i^\alpha \varkappa_{\alpha\beta} \Psi^\beta + \Psi,{}_i^\alpha \varkappa_{\alpha\beta} \delta\Psi^\beta = 0,$$

откуда в силу (22), (20) и (23) имеем

$$\delta_\Psi \varphi_0^i = \Delta^{ij} \delta\Psi,{}_j^\alpha \varkappa_{\alpha\beta} \Psi^\beta + \Delta^{ij} \Psi,{}_j^\alpha \varkappa_{\alpha\beta} \delta\Psi^\beta = \Delta^{ij} \Psi,{}_j^\alpha \varkappa_{\alpha\beta} \delta\Psi^\beta = R_\alpha^i D_\beta^\alpha \delta\Psi^\beta.$$

Итак, для явной вариации $\bar{\delta}_\Psi \Gamma^{(1)}(\varphi_0)$ в силу (23) имеем

$$\delta\Gamma^{(1)}(\varphi_0) = -\frac{i}{2} \Delta^{ji} 2\delta\Psi,{}_i^\alpha \varkappa_{\alpha\beta} \Psi,{}_j^\beta + i D_\alpha^\gamma R_\gamma^i \delta\Psi,{}_i^\alpha =$$

$$= -i D_\alpha^\gamma R_\gamma^i \delta\Psi,{}_i^\alpha + i D_\alpha^\gamma R_\gamma^i \delta\Psi,{}_i^\alpha \equiv 0.$$

Рассмотрим теперь первый член в (21):

$$\Gamma,{}_i^{(1)} \delta_\Psi \varphi_0^i = \Gamma,{}_i^{(1)} R_\alpha^i D_\beta^\alpha \delta\Psi^\beta;$$

для $\Gamma,{}_i^{(1)} R_\gamma^i$ имеем:

$$\Gamma,{}_i^{(1)} R_\gamma^i = -\frac{i}{2} \Delta^{ji} S_{,ijk} R_\gamma^k + i D_\beta^\alpha \Psi,{}_i^\beta R_{\alpha,k}^i R_\gamma^k =$$

$$= -\frac{i}{2} \Delta^{ji} [-S_{,ik} R_{\gamma,j}^k - S_{,jk} R_{\gamma,i}^k] + i D_\beta^\alpha \Psi,{}_i^\beta R_{\alpha,k}^i R_\gamma^k =$$

$$= i \Delta^{ji} S_{,ik} R_{\gamma,j}^k + i D_\beta^\alpha \Psi,{}_i^\beta R_{\alpha,k}^i R_\gamma^k =$$

$$= i [-\delta_k^j - \Psi,{}_k^\alpha \varkappa_{\alpha\beta} \Psi,{}_i^\beta \Delta^{ij}] R_{\gamma,j}^k + i D_\beta^\alpha \Psi,{}_i^\beta R_{\alpha,k}^i R_\gamma^k =$$

$$= -i R_{\gamma,k}^k - i D_\beta^\alpha \Psi,{}_k^\alpha R_{\gamma,j}^k R_\beta^j + i D_\beta^\alpha \Psi,{}_i^\beta R_{\alpha,k}^i R_\gamma^k =$$

$$= i D_\beta^\alpha \Psi,{}_i^\beta (R_{\alpha,k}^i R_\gamma^k - R_{\gamma,k}^i R_\alpha^k) =$$

$$= i D_\beta^\alpha \Psi,{}_i^\beta R_\delta^i C_{\alpha\gamma}^\delta = -i C_{\delta\gamma}^\delta = 0.$$

В процессе преобразований мы воспользовались соотношениями (3)—(5), (18) и (22).

Рассмотрим, наконец, двухпетлевой вклад в эффективное действие на экстремали. При вычислении вариации необходимо воспользоваться соотношением

$$\bar{\delta}_\Psi \Delta^{jk} = \Delta^{\{jl} \delta\Psi,{}_l^\alpha D_\alpha^\gamma R_\gamma^{k\}},$$

где фигурные скобки обозначают симметризацию по индексам j и k.

Для $\bar{\delta}_\Psi \Gamma^{(2)}(\varphi_0)$ после трудоемких вычислений находим

$$\bar{\delta}_\Psi \Gamma^{(2)}(\varphi_0) = \frac{1}{2} S_{,mpl} \Delta^{pl} \Delta^{kn} \delta\Psi,{}_n^\beta D_\beta^\alpha R_{\alpha,k}^m +$$

$$+ \Delta^{kn} \delta\Psi,{}_n^\beta D_\beta^\alpha R_{\alpha,k}^m D_\rho^\gamma D_{\gamma,m}^{-1\,\rho}.$$

Для $\bar{\delta}_{\Psi}\left[\frac{1}{2}\Gamma,_{i}^{(1)}\Delta^{ij}\Gamma,_{j}^{(1)}\right]$ получается то же выражение, только с обратным знаком. Вариация через экстремаль также может быть, в принципе, вычислена с помощью соотношений, полученных в настоящей работе.

Остановимся особо на случае, когда φ_0^i является ковариантно постоянным полем [2]. Нетрудно убедиться в том, что $\Gamma,_i^{(1)}$ в этом поле равно нулю, поскольку равна нулю функция Грина глюона $(R^i_{\alpha}\Delta_{ij}|_{i=j}=0)$ в совпадающих точках $i=j$. Поэтому при вычислении двухпетлевой поправки к эффективному действию [5] мы ограничились только первым слагаемым в фигурных скобках (16).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
АН СССР
Ереванский физический
институт

Поступила 4.V.1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Fukuda, T. Kugo.* Preprint RIFP—237, 1975.
2. *И. А. Баталин, С. Г. Матинян, Г. К. Саввиди.* ЯФ, 26, 407 (1977); Научное сообщение ЕФИ, 198 (44)—76.
3. *Г. К. Саввиди.* Изв. АН АрмССР, Физика, 12, 72 (1977).
4. *B. S. De Witt.* Phys. Rev., 162, 1195, 1239 (1967).
   B. S. De Witt. Dynamical Theory of groups and fields (Gordon and Breach, 1965).
5. *I. A. Batalin, G. K. Savvidy.* Scientific Report EFI—299 (24)—78.

ԱՂԲՅՈՒՐՆԵՐ ՉՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՃՇԳՐԻՏ ԷԿՍՏՐԵՄԱԼԻ ՎՐԱ ԷՖԵԿՏԻՎ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏՐԱՄԱՉԱՓԱՅԻՆ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ի. Ա. ԲԱՏԱԼԻՆ, Գ. Կ. ՍԱՎՎԻԴԻ

Տրված է Յանգ-Միլսի տեսության աղբյուրներ չպարունակող շարժման հավասարումներին բավարարող դաշտերի էֆեկտիվ ազդեցության տրամաչափային ինվարիանտության բացահայտ ապացույցը։

ON THE GAUGE INVARIANCE OF EFFECTIVE ACTION ON PRECISE SOURCELESS EXTREMAL

I. A. BATALIN, G. K. SAVVIDY

An explicit proof of gauge invariance of the effective action for fields satisfying the sourceless equations of motion in Yang-Mills theory is given.