

РАСЧЕТ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ
ВТОРОГО РОДА

Р. М. АРУТЮНЯН, Г. М. АРУТЮНЯН

На основе полуфеноменологической теории сверхпроводимости рассчитаны пондеромоторные силы, действующие на вихревую решетку сверхпроводников второго рода.

Известно, что в сверхпроводниках с током или помещенных во внешнее магнитное поле возникают очень большие пондеромоторные силы. В идеальных сверхпроводниках второго рода в состоянии равновесия отличные от нуля пондеромоторные силы возникают вследствие электромагнитного взаимодействия экранирующих мейсснеровских токов как между собой, так и с вихревой решеткой. В жестких сверхпроводниках в так называемых «критических состояниях» кроме вышеуказанных поверхностных сил возникают также объемные пондеромоторные силы. Они появляются вследствие электромагнитного взаимодействия неравномерно распределенных вихревых нитей по объему образца.

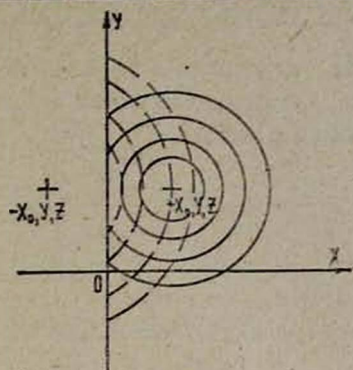
С точки зрения вышеизложенного вызывает определенный интерес вычисление пондеромоторной силы, действующей на отдельную вихревую нить сверхпроводника. Этот вопрос мы рассмотрим как в идеальных сверхпроводниках второго рода, так и в жестких материалах с гистерезисом магнитной индукции. В основном мы ограничимся плотностями нитей $n(x)$ в области $1/\lambda^2 \ll n(x) \ll 1/\xi^2$ и внешними магнитными полями G_0 такими, что $H_{c1} \ll G_0 \ll H_{c2}$, где H_{c1} и H_{c2} — соответственно нижнее и верхнее критические поля [1, 2], а λ и ξ — лондоновская длина и длина корреляции.

Предположим, что сверхпроводник занимает полупространство $x \geq 0$. Внешнее магнитное поле G_0 направим по оси oz параллельно границе раздела сверхпроводника с вакуумом. Пондеромоторную силу вычислим с помощью известной формулы [3]

$$f = \frac{J}{c} [dl \cdot H], \quad (1)$$

где dl — элемент тока.

Распределение вихревых токов нити, расположенной у поверхности образца, с центром в точке (x_0, y, z) приведено на рисунке. Как известно [2, 4], у поверхности нить деформирована, и распределение токов в ней можно получить суперпозицией токов двух недеформированных нитей с центрами в точках (x_0, y, z) и $(-x_0, y, z)$. При этом нить с центром в точке $(-x_0, y, z)$ является изображением реальной нити образца. На рисунке она показана пунктирной линией. Пользуясь формулой (1), для силы, действующей на нить, получаем следующее выражение:



$$\begin{aligned}
 F(x_0) = & \frac{2}{c} \int_0^{x_0} j(r) dr \int_{x_0}^{r+x_0} \frac{H(x) \cdot (x-x_0)}{\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}} dx + \\
 & + \frac{2}{c} \int_0^{x_0} j(r) dr \int_{x_0-r}^{x_0} \frac{H(x) \cdot (x-x_0)}{\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}} dx + \\
 & + \frac{2}{c} \int_{x_0}^{+\infty} j(r) dr \int_{x_0}^{r+x_0} \frac{H(x) \cdot (x-x_0)}{\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}} dx + \\
 & + \frac{2}{c} \int_{x_0}^{+\infty} j(r) dr \int_0^{x_0} \frac{H(x) \cdot (x-x_0)}{\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}} dx - \\
 & - \frac{2}{c} \int_{x_0}^{+\infty} j(r) dr \int_0^{r-x_0} \frac{H(x) \cdot (x+x_0)}{\sqrt{r^2 - (x+x_0)^2}} dx.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $H(x)$ — поле, созданное всеми вихревыми нитями образца, их изображениями и внешним полем. Из симметрии задачи следует, что поле $H(x)$ направлено по оси oz и зависит только от координаты x . На этом основании сила $F(x_0)$ (2) имеет отличную от нуля составляющую только по оси oz и зависит только от координаты x . В (2) $j(r)$ — плотность токов нити, равная [1, 2]

$$j(r) = -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_1(r/\lambda),$$

где K_1 — функция Ханкеля от мнимого аргумента, а $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-7}$ эс² — квант магнитного потока. Последний интеграл в (2) представляет собой силу, действующую на токи изображения. Поле, созданное нитями, расположенными в плоскости $x = x_0$, с точностью до членов порядка $ae^{-2\pi|x-x_0|/\lambda}$ равно [4]

$$\frac{\Phi_0}{2a\lambda} e^{-|x-x_0|/\lambda}, \quad (3)$$

где $a(x)$ — период решетки; по порядку величины $\xi \ll a(x) \ll \lambda$.

Воспользовавшись (3) и перейдя для удобства от суммирования к интегрированию, для поля $H(x)$, созданного всеми нитями, их изображениями и внешним полем G_0 , можно получить

$$H(x_0) = \frac{\Phi_0}{2\lambda} \int_0^{x_0} n(x) e^{-(x_0-x)/\lambda} dx + \frac{\Phi_0}{2\lambda} \int_{x_0}^{+\infty} n(x) e^{-(x-x_0)/\lambda} dx - \frac{\Phi_0}{2\lambda} \int_0^{+\infty} n(x) e^{-(x+x_0)/\lambda} dx + G_0 e^{-x_0/\lambda}. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что: 1) справедлив принцип суперпозиции полей и токов, созданных всеми нитями и внешним источником; 2) плотность нитей $n(x)$ меняется плавно на расстояниях, больших периода вихревой решетки $a(x)$. Следует отметить, что (4) справедливо как для идеальных, так и для жестких сверхпроводников.

Используя (4), после двукратного дифференцирования (2) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x_0)}{\partial x_0^2} - \frac{1}{\lambda^2} F(x_0) &= \frac{\Phi_0}{4\pi^2 \lambda^4} [Q_2(0) - G_0/2] \left[\frac{\partial}{\partial x_0} \int_{x_0}^{+\infty} K_1(r/\lambda) \sqrt{r^2 - x_0^2} dr \right] + \\ &+ \frac{1}{\lambda^2} \left\{ - \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 \lambda^3} \left[\int_0^{x_0} K_1(r/\lambda) dr \int_0^r n(t+x_0) \frac{t}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt - \right. \right. \\ &- \int_0^{x_0} K_1(r/\lambda) dr \int_0^r n(x_0-t) \frac{t}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt + \\ &+ \int_{x_0}^{+\infty} K_1(r/\lambda) dr \int_0^r \frac{t \cdot n(x_0+t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt - \\ &- \int_{x_0}^{+\infty} K_1(r/\lambda) dr \int_0^{x_0} n(x_0-t) \frac{t}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt + \\ &+ \left. \int_{x_0}^{+\infty} K_1(r/\lambda) dr \int_{x_0}^r \frac{t \cdot n(t-x_0)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt \right] \Big\} + \\ &+ \frac{2\Phi_0^2}{4\pi^2 \lambda^5} \left\{ \int_{x_0}^{+\infty} K_1(r/\lambda) dr \int_{x_0}^r n(t-x_0) \frac{t dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введено обозначение

$$Q_2(0) = \frac{\Phi_0}{2\lambda} \int_0^{+\infty} n(x) e^{-x/\lambda} dx.$$

Из (4) следует, что

$$Q(0) - \frac{G_0}{2} = \lambda \left. \frac{\partial H}{\partial x_0} \right|_{x_0=0}.$$

Для дальнейшего изложения полезно отметить следующее. Силы (1) и (2) направлены в сторону возрастания магнитного поля и, соответственно, в сторону роста плотности нитей в образце. На этом основании, например, пондеромоторная сила, возникающая между двумя одинаково направленными нитями, притягивает нити друг к другу. С другой стороны, известно [2], что свободная энергия двух нитей состоит из энергий изолированных нитей и энергии взаимодействия, равной

$$\Phi_0 \cdot h_{12} / 4\pi, \quad (6)$$

где h_{12} — поле, созданное одним вихрем на остоле другого. Член взаимодействия (6) для одинаково направленных нитей положителен и соответствует их отталкиванию. Аналогичным образом энергия нити во внешнем поле $G_0(x) > 0$, равная

$$\Phi_0 \cdot G_0(x) / 4\pi, \quad (6a)$$

также приводит к отталкиванию нити в сторону уменьшения $H(x)$.

Природа сил отталкивания, соответствующих (6) и (6a) и равных

$$-\Phi_0 \nabla h_{12} / 4\pi \text{ и } -\Phi_0 \nabla G_0(x) / 4\pi, \quad (7)$$

отличается от природы пондеромоторных сил (1) и (2). Во-первых, они противоположно направлены, во-вторых, они различны по величине. Например, для двух вихревых нитей пондеромоторная сила притяжения мала по сравнению с термодинамической силой отталкивания (7). Напомним, что в данном случае термодинамическая сила не совпадает с механической силой, действующей на вихрь. Это следует хотя бы из выражений (7), определяющих ее как градиент от неравновесной свободной энергии, а не просто от энергии. Следовательно, термодинамическая сила содержит в себе помимо механических воздействий на вихрь также статистические (энтропийные) факторы. В частности, для двух вихревых нитей термодинамическая сила, по-видимому, за счет энтропийного размешивания приводит к эффективному отталкиванию двух вихрей [2].

Что касается жестких сверхпроводников, то из-за неравномерного распределения нитей суммарная величина сил (7) в «критическом состоянии» отлична от нуля и компенсируется объемной силой сцепления центров «пиннинга». Далее для упрощения дифференциального уравнения (5) будет полезно вычислить с помощью (7) суммарную силу отталкивания g , с которой все нити образца, их изображения и внешний источник действуют на недеформированную нить, помещенную в точку $x_0 > 0$. Силу g вычислим следующим образом. Вначале определим суммарную силу Δg отталкивания, с которой нити, расположенные между плоскостями x и $x + \Delta x$, действуют на нить, расположенную в плоскости x_0 . Из симметрии задачи следует, что суммарная сила в точке (x, y, z) направлена перпендикулярно к оси нити и не зависит от координат y, z . Используя (7), для Δg найдем

$$\Delta g = \frac{\Phi_0^2}{8\pi\lambda^2} e^{-|x-x_0|/\lambda} n(x) \Delta x. \quad (8)$$

Интегрирование (8) по x для g дает

$$g = \frac{\Phi_0^2}{8\pi\lambda^2} \left\{ \int_0^{x_0} n(x) e^{-(x_0-x)/\lambda} dx - \int_{x_0}^{+\infty} n(x) e^{-(x-x_0)/\lambda} dx - \right. \\ \left. - \int_0^{+\infty} n(x) e^{-(x+x_0)/\lambda} dx \right\} - \frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_0} G_0(x_0). \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что выражение в фигурной скобке в (9) совпадает с первой фигурной скобкой в правой части (5).

Далее, из (4) и (9) имеем

$$\frac{8\pi\lambda^2}{\Phi_0^2} \left[g(x_0) + \frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{\partial G_0(x_0)}{\partial x_0} \right] = -\frac{2\lambda^2}{\Phi_0} \frac{\partial}{\partial x_0} [H(x_0) - G_0(x_0)], \quad (10)$$

откуда получается соотношение

$$g(x_0) = -\frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{\partial H(x_0)}{\partial x_0}. \quad (11)$$

Учитывая (5), (9)–(11), окончательно находим

$$\frac{\partial^2 F(x_0)}{\partial x_0^2} - \frac{1}{\lambda^2} F(x_0) = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{\partial H(x_0)}{\partial x_0} - \\ - \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \frac{\partial H(x_0)}{\partial x_0} \right) \Big|_{x_0=0} + \frac{\Phi_0 \cdot G_0}{4\pi\lambda^3} - \frac{\Phi_0^2}{4\pi\lambda^3} n(0) \Big) e^{-x_0/\lambda}. \quad (12)$$

Наличие последнего члена в круглых скобках (12) соответствует предположению, что $n(x)$ (в последнем интеграле выражения (2)) у границы обрыва меняется слабо на расстояниях порядка λ .

Общее решение (12)

$$C_1 e^{x_0/\lambda} + C_2 e^{-x_0/\lambda}$$

тождественно обращается в нуль, так как согласно (2) $F(x_0=0)=0$, а при $x_0=+\infty$ поперечная сила конечна. Тогда из (12) для силы, действующей на отдельную вихревую нить, можно получить выражение

$$F(x_0) = \frac{\Phi_0}{8\pi\lambda} \left\{ \int_0^{x_0} \frac{\partial H}{\partial x} e^{-(x_0-x)/\lambda} dx + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x} e^{-(x-x_0)/\lambda} dx - \right. \\ \left. - \int_0^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x} e^{-(x+x_0)/\lambda} dx \right\} + \frac{\Phi_0}{8\pi\lambda} \left(\frac{\partial H(x_0)}{\partial x_0} \right) \Big|_{x_0=0} + \frac{G_0}{\lambda} - \frac{\Phi_0 n(0)}{\lambda} \Big) x_0 e^{-x_0/\lambda}. \quad (13)$$

Выражение (13) справедливо как для идеальных, так и для жестких сверхпроводников с гистерезисом магнитной индукции. В идеальных веществах при $H_{c1} \ll G_0 \ll H_{c2}$ индукция $B(x) = H(x) = \text{const}$ при всех $0 \leq x_0 < +\infty$ (см., например, [2, 4]). С учетом этого из (13) получаем

$$F(x_0) = \left(-\frac{\Phi_0^2 n(0)}{8\pi\lambda^2} + \frac{G_0\Phi_0}{8\pi\lambda^2} \right) x_0 e^{-x_0/\lambda}. \quad (13a)$$

Умножая (13a) на $n(x)$, найдем пондеромоторную силу в 1 см^3 вещества. Для сопоставления с ней вычислим термодинамическую силу отталкивания. С этой целью запишем свободную энергию вещества по аналогии с [2, 4]:

$$\Phi_s = \frac{\Phi_0}{4\pi} \int n(x) \left(G(x) + \frac{1}{2} h_2(x) - G_0 \right) dx + C. \quad (14)$$

Здесь C — аддитивная постоянная, $h_2(x)$ — поле, созданное всеми вихрями и их изображениями в точке x . Величина в круглых скобках верна с точностью до члена порядка H_{c1} . Так как $H_{c1} \ll G_0(x)$, $H_{c1} \ll H_0$, $h_2(x)$, то ее вкладом в (14) можно пренебречь.

Давление в системе, как и в [2], определим согласно формуле

$$p = - \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial V} \right)_{N=\text{const}}. \quad (15)$$

Обозначим через S основание объема (с единичной высотой), пересекаемого всеми нитями. Воспользовавшись условием $S \cdot n = N = \text{const}$ и перейдя от переменной S к $n(x)$, из (15) находим

$$p = - \frac{\Phi_0 n^2(x)}{8\pi} \frac{\partial h_2(x)}{\partial n} = - \frac{\Phi_0 \cdot n^2(x)}{8\pi} \frac{\partial B(x)}{\partial n(x)}. \quad (15a)$$

Сила определится из условия $f = -\partial p / \partial x$.

В отличие от [2], мы в (15) не перешли от переменной S к индукции $B(x)$, так как у поверхности $B(x) \neq \Phi_0 \cdot n(x)$. Для того, чтобы убедиться в этом, продифференцируем (4) два раза по переменной x_0 :

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 B(x_0)}{\partial x_0^2} - B(x_0) = -\Phi_0 \cdot n(x_0). \quad (16)$$

Решив уравнение (16) с учетом (15a), при $x_0 \gg \lambda$ получим $B(x_0) = n(x_0) \cdot \Phi_0$. При $0 \leq x_0 \leq \lambda$ индукция $B(x)$ зависит как от $n(x)$, так и от переменной x , т. е. $B = B(x, n(x))$.

Решение упрощается в случае идеальных сверхпроводников второго рода. Подставляя $n(x)$ из (16) в (14), используя соотношение $G(x) + \frac{1}{2} h_2(x) = B(x)$ и варьируя Φ_s по $B(x)$, придем к уравнению

$$-\lambda^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x_0^2} + B(x_0) - G_0 = 0. \quad (17)$$

Решение (17) при граничном условии $B(0) = G_0$ и конечном $B(+\infty)$ дает $B(x) = G_0 = n_0 \cdot \Phi_0$ при $0 \leq x_0 < +\infty$. Тогда из (15a) находим, что

термодинамическая сила всюду в объеме тождественно равна нулю. Таким же образом из (13а) следует, что пондеромоторная сила, действующая на нить в идеальных сверхпроводниках, равна нулю независимо от ее расположения в образце.

Таким образом, суммарная пондеромоторная сила, действующая в образце из идеального сверхпроводника второго рода, определяется только электромагнитным взаимодействием экранирующих мейсснеровских токов друг с другом. В неидеальных сверхпроводниках величину силы можно оценить в простом случае $\partial H / \partial x = \text{const}$. Тогда

$$F(x_0) = \frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{\partial H(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\Phi_0}{8\pi\lambda} \left(\frac{\partial H(x_0)}{\partial x_0} \right) \Big|_{x=0} + \frac{G_0}{\lambda} - \frac{\Phi_0 n(0)}{\lambda} x_0 e^{-x_0/\lambda}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что в объеме образца сила направлена в сторону увеличения $H(x_0)$. У поверхности вследствие того, что $G_0 \neq \Phi_0 \cdot n(0)$, направление силы определяется знаком круглой скобки.

Ереванский государственный
университет

Поступила 25.IV.1978

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Абрикосов. ЖЭТФ, 32, 1442 (1957).
2. П. Де Жен. Сверхпроводимость металлов и сплавов, Изд. Мир, М., 1968.
3. И. Е. Тамм. Основы теории электричества, ГИТТЛ, М., 1956.
4. В. В. Шмидт, Г. С. Мкртчян. УФН, 112, 459 (1974).

ՊՈՆԴԵՐՈՄՈՏՈՐ ՈՒԺԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ
ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉՆԵՐՈՒՄ

Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Գ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Գերհաղորդիչների կիսաֆենոմենոլոգիկ տեսության հիման վրա հաշվարկված են պոնդերոմոտոր ուժերը, որոնք ազդում են երկրորդ կարգի գերհաղորդիչների մրրիկային ցանցի վրա:

THE CALCULATION OF PONDEROMOTIVE FORCES IN SECOND-TYPE SUPERCONDUCTORS

R. M. HARUTYUNYAN, G. M. HARUTYUNYAN

On the basis of semiphenomenological theory of superconductivity the ponderomotive forces acting on the vortex lattice of second-type superconductors were calculated.