Изв. АН Армянской ССР. Физика, 14, 10—15 (1979)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КВАЗИЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ

К. Х. СИМОНЯН

Рассмотрено асимптотическое поведение спектра квазиэнергии многоуровневой системы в сильном монохроматическом поле. В частности, подробно исследованы двух- и трехуровневые системы. Впервые получены формулы, описывающие поведение квазиэнергии в зависимости от напряженности поля при асимптотически больших значениях параметра интенсивности.

1. Общее рассмотрение

Рассмотрим многоуровневую систему, находящуюся в поле монохроматической волны. Описывающие ее уравнения имеют вид

$$i\dot{a}_\alpha(t) = \omega_\alpha \cdot a_\alpha(t) + \sum_{\beta \neq \alpha}^{N} V_{\alpha\beta} \cdot 2\cos\omega t \cdot a_\beta(t), \tag{1}$$

где $\hbar\omega_\alpha$ — спектр невозмущенной системы, $2\hbar V_{\alpha\beta}$ — матричные элементы взаимодействия. Запишем (1) в матричном виде

$$i\dot{\Phi}(t) = \hat{H}_0 \Phi(t) + 2\hat{V}\cos\omega t \cdot \Phi(t), \tag{2}$$

где

$$\Phi = \begin{Vmatrix} \vdots \\ a_\alpha \\ \vdots \end{Vmatrix}, \quad \hat{H}_0 = \|\omega_\alpha \cdot \delta_{\alpha\beta}\|, \quad \hat{V} = \|V_{\alpha\beta} \cdot (1 - \delta_{\alpha\beta})\|.$$

Разлагая $\Phi(t)$ в ряд по собственным функциям оператора $\hat{V}$

$$\Phi(t) = \sum_{\beta=1}^{N} C'_\beta(t)\varphi_\beta,$$

из (2) для коэффициентов $C'_\beta(t)$ получаем уравнение

$$i\dot{C}'_\alpha = (\lambda_\alpha \cdot \cos\omega t + H_{0\alpha\alpha}) C'_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} H_{0\alpha\beta} C'_\beta. \tag{3}$$

Здесь $H_{0\alpha\beta}$ — матричные элементы, вычисленные с помощью функций (φ_β), λ_α — собственные значения оператора $\hat{V}$.

Преобразованием амплитуд

$$C'_\alpha(t) = C_\alpha(t) \cdot \exp\left(-i\frac{\lambda_\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$$

уравнение (3) приводится к виду

$$i\dot{C}_\alpha(t) = H_{0\alpha\alpha} C_\alpha(t) + \sum_{\beta \neq \alpha}^{N} H_{0\alpha\beta} e^{-i\left(\frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}{\omega}\right)\cdot \sin\omega t} C_\beta(t). \tag{4}$$

Преимущество этого представления [1] состоит в том, что даже при асимптотически сильных полях ($V_{\alpha\beta} \to \infty$) коэффициенты уравнения (4) остаются конечными*. Фурье-представление уравнения (4) имеет вид

$$C_{\alpha, n} = (E/\omega - n - \overline{\omega}_\alpha)^{-1} \sum_{\substack{\beta \neq \alpha \\ m}} \beta_{\alpha\beta} J_{n-m}\left(\frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}{\omega}\right) \cdot C_{\beta, m}, \tag{5}$$

где E — спектр квазиэнергии системы (4), $\overline{\omega}_\alpha = H_{0\alpha\alpha}/\omega$, $\beta_{\alpha\beta} = H_{0\alpha\beta}/\omega$, $J_0(\alpha)$ — функция Бесселя.

Систему уравнений (5) можно решить обычными приближенными методами. Однако с целью получения аналитических выражений (даже при точном резонансе $\overline{\omega}_\alpha = n$) и для повышения точности результатов воспользуемся развитым в работах [2, 3] методом Хилла, который для детерминанта системы (5) дает выражение

$$D(E) = 1 + i2\pi \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{R_\alpha \exp(i2\pi \overline{\omega}_\alpha)}{\exp(i2\pi E/\omega) - \exp(i2\pi \overline{\omega}_\alpha)}, \tag{6}$$

где

$$R_\alpha = \lim_{E/\omega \to \overline{\omega}_\alpha} (E/\omega - \overline{\omega}_\alpha) D(E), \quad \sum_\alpha R_\alpha = 0,$$

т. е. для характеристической экспоненты $\exp(i2\pi E/\omega)$ получается уравнение N-степени.

Так как точное выражение для $D(E)$ получить невозможно, воспользуемся разложениями R_α в ряд по степеням $\beta_{\alpha\beta}$, справедливыми при $\beta_{\alpha\beta} \leqslant 1$ (сходимость рядов факториальная) и при любых значениях $(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)/\omega$.

Рассмотрим случай резонанса. Пусть для уровней γ и δ имеет место условие $|\overline{\omega}_\gamma - \overline{\omega}_\delta - m| \ll 1$, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$. Тогда, как видно из (6),

$$R_\gamma \approx \varepsilon (\overline{\omega}_\gamma - \overline{\omega}_\delta - m)^{-1} + \varepsilon_1,$$

$$R_\delta \approx - \varepsilon (\overline{\omega}_\gamma - \overline{\omega}_\delta - m)^{-1} + \varepsilon_2$$

и $D(E)$ принимает вид

$$D(E) = 1 + \varepsilon (2\pi)^2 [2 \sin (E/\omega - \overline{\omega}_\delta) \pi]^{-2} +$$
$$+ i2\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \exp(i2\pi \overline{\omega}_\gamma) [\exp(i2\pi E/\omega) - \exp(i2\pi \overline{\omega}_\gamma)]^{-1} +$$
$$+ i2\pi \sum_{\alpha \neq \gamma, \delta} R_\alpha \exp(i2\pi \overline{\omega}_\alpha) [\exp(i2\pi E/\omega) - \exp(i2\pi \overline{\omega}_\alpha)]^{-1},$$

причем во всех остальных R_α можно положить $\overline{\omega}_\gamma = \overline{\omega}_\delta + m$. Сходимость разложений для ε, ε_1, ε_2 также будет факториальной**.

---

* В случае, когда $\lambda_\beta = \lambda_\alpha$ ($\beta = 1, \cdots, m$) (наличие вырождения), вместо функций (φ_β) надо брать такие их линейные комбинации, по которым недиагональные матричные элементы $H_{0\alpha\beta}$ обращаются в нуль.

** В работе [3] члены с ε_1 и ε_2 ошибочно были опущены.

Приведем выражение для R_α, ограничившись членами низшей степени по $\beta_{\alpha\beta}$:

$$R_\alpha \approx -\sum_{\beta \neq \alpha} (\beta_{\alpha\beta})^2 \frac{J_n((\lambda_\alpha - \lambda_\beta)/\omega)}{\bar{\omega}_\alpha - \bar{\omega}_\beta - m}. \tag{7}$$

Определяя спектр квазиэнергии из уравнения $D(E) = 0$, можно вычислить средние значения различных физических величин в данном квазиэнергетическом состоянии [3, 4]. Проиллюстрируем применение данного метода на примере двух- и трехуровневой систем.

2. Двухуровневая система

Гамильтониан двухуровневой системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + 2\hat{V}\cos\omega t,$$

где

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ V_{21} & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Соответствующие параметры есть

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{\omega_0}{2\omega} = \beta, \quad \alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\omega} = \frac{2V}{\omega},$$

где

$$V = \sqrt{V_{12}\, V_{21}}.$$

Для квазиэнергии системы (8) с точностью до членов β^4 включительно получаем

$$E_{1,2} = \frac{\omega_0}{2} \pm \frac{\omega}{2\pi} \arccos\left\{1 - \beta^2 2\pi^2 \left[J_0^2 - \beta^2\left(\frac{\pi^2}{3} J_0^4 + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + 2J_0^2 \sum_{n\neq 0} \frac{J_n^2}{n^2} + 2J_0 \sum_{n,\, m\neq 0} \frac{J_n J_m J_{n+m}}{nm}\right)\right]\right\}, \tag{9}$$
$$J = J(2\alpha).$$

Рассмотрим интересующий нас случай $\alpha \geqslant 0$. Имеем

$$E_{1,2} = \frac{\omega_0}{2} \pm \frac{\omega}{2\pi} \arccos\left\{1 - \left(\frac{\pi}{4\alpha}\right)\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 2\cos(2\alpha - \pi/4) - \right.$$
$$- \left(\frac{\pi}{4\alpha}\right)^{3/2} \left(\frac{\omega_0}{2\omega}\right)^2 \sin 2(2\alpha - \pi/4) +$$
$$+ \left(\frac{\pi}{4\alpha}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left(\cos^4(2\alpha - \pi/4) - 2\cos^2(2\alpha - \pi/4)\right) - \right. \tag{10}$$
$$\left.\left. - \frac{1}{32}\sin^2(2\alpha - \pi/4)\right]\right\}.$$

Нижний знак в (10) соответствует той ветви квазиэнергии, которая обращается в нуль при $\alpha \to 0$ и которая при $\alpha = 1$ с небольшой погрешностью сшивается с результатом работы [2]. Отметим также, что при $\alpha<1$ из (9) получаются хорошо известные результаты [2, 5, 6].

Начиная с $\alpha\sim 2$ члены с β^5 несущественны, и для ветвей квазиэнергии можно записать

$$E_{1,2}=\frac{\omega_0}{2}\pm\frac{\omega}{2\pi}\arccos\left[1-\pi^2\frac{\omega_0^2}{2\omega^2}J_0^2(2\alpha)\right]= \\ =\frac{\omega_0}{2}\pm\frac{\omega}{2\pi}\arcsin\left[\pi\frac{\omega_0}{2\omega}\sqrt{J_0^2(2\alpha)}\right]. \tag{11}$$

В связи с этим результатом отметим, что и в работе [7] можно было бы получить спектр квазиэнергии, несмотря на отсутствие информации о нем в найденной волновой функции. Действительно, используя формулу

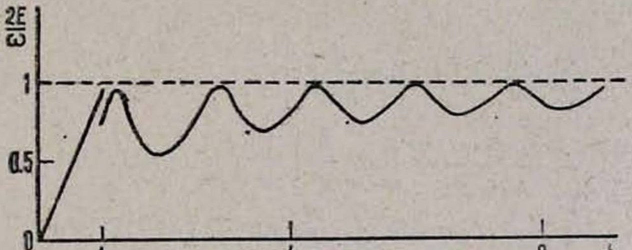
$$\overline{|a_\alpha(t)|^2}=\partial E_\mu/\partial\omega_\alpha,$$

где $\overline{|a_\alpha(t)|^2}$ — среднее по периоду T значение вероятности обнаружения системы в состоянии α [3, 4], из решения [7] легко получить

$$E_{1,2}=\frac{\omega_0}{2}\pm\frac{\omega_0}{2}\sqrt{J_0^2(2\alpha)},$$

что находится в согласии с (11) при $\omega=\omega_0$.

Таким образом, для квазиэнергии получается аналитическое выражение при любых значениях α (но $\omega_0/2\omega\leqslant 1$). На рисунке приведена зависимость $E\_/2\omega$ от α при $\omega=\omega_0$, определяемая формулой (10).



Как видим, функция, осциллируя, стремится к единице; прямая линия соответствует результату работы [1].

3. Трехуровневая система

Рассмотрим трехуровневую систему, для которой

$$\hat{H}_0=\begin{pmatrix}\omega_1 & 0 & 0\\ 0 & \omega_2 & 0\\ 0 & 0 & \omega_3\end{pmatrix},\quad \hat{V}=\begin{pmatrix}0 & V_{12} & 0\\ V_{21} & 0 & V_{23}\\ 0 & V_{32} & 0\end{pmatrix}.$$

Введем параметры $\alpha_1=2V_1/\omega$ и $\alpha_2=2V_2/\omega$, характеризующие интенсивность полей: $V_1=\sqrt{V_{12}V_{21}}$, $V_2=\sqrt{V_{23}V_{32}}$. Условия $\beta_{\alpha\beta}\leqslant 1$ сводятся к условиям $|\omega_1-\omega_2|/2\omega$, $|\omega_2-\omega_3|/2\omega$, $|\omega_1-\omega_3|/2\omega\leqslant 1$. В случае, когда $\alpha_1^2(\omega_1+\omega_2-2\omega_3)$ мало отличается от $\alpha_2^2(2\omega_1-\omega_2-\omega_3)$, уравнение $D(E)=0$ имеет следующие решения:

$$E_{1,2}=\frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-1}\left[\alpha_1^2(\omega_1+\omega_2)+\alpha_2^2(\omega_2+\omega_3)\right]\pm$$

$$\pm\frac{\omega}{2\pi}\arccos\left\{1-2\pi^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-2}\left[\alpha_1^2\alpha_2^2\left(\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega}\right)^2 J_0^2\left(\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\alpha_1^2\frac{\omega_1-\omega_2}{2\omega}+\alpha_2^2\frac{\omega_3-\omega_2}{2\omega}\right)^2 J_0^2\left(2\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\right)\right]\right\}, \tag{12}$$

$$E_3=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-1}(\alpha_1^2\,\omega_3+\alpha_2^2\,\omega_1).$$

Отсюда ясно, что при $\alpha_2=0$ $E_{1,2}$ совпадает с (11) ($\omega_1=0$, $\omega_2=\omega_0$), а $E_3=\omega_3$, как и следовало ожидать.

Автор выражает благодарность А. О. Меликяну за постановку задачи и обсуждения, а также сотрудникам кафедры ядерной физики ЕГУ за внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 25.VI.1978

Приложение

При вычислении сумм, фигурирующих в R_α, можно воспользоваться соотношениями

$$\sum_{n\neq 0}\frac{J_n^2}{n^2}=-\pi\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{J_zJ_{-z}}{\sin\pi z}-\frac{J_0^2}{\pi z}\right), \tag{a}$$

$$\sum_{n,\,m\neq 0}\frac{J_nJ_mJ_{n+m}}{nm}=\lim_{z'\to 0}\frac{1}{z'}\left[\frac{d}{dz}J_{-z}\,J_{-z'}\,J_{z+z'}\right]_{z=0}. \tag{б}$$

Действительно, функция $J_z\,J_{-z}/\sin\pi z$ удовлетворяет всем требованиям теоремы о разложении функции на простейшие дроби [8], т. е.

$$\pi\frac{J_z\,J_{-z}}{\sin\pi z}=\sum_n\frac{J_n^2}{z-n},$$

откуда и следуют формулы (а) и (б).

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. О. Меликян, К. Х. Симонян.* Тезисы докладов IX Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике, Ленинград, 1978, часть II, стр. 80.
2. *А. О. Меликян.* ЖЭТФ, 68, 1228 (1975).
3. *А. О. Меликян.* Квантовая электроника, 4, 429 (1977).
4. *J. Shirley.* Phys. Rev., 138B, 979 (1965).
5. *М. Л. Тер-Микоелян, А. О. Меликян.* ЖЭТФ, 58, 281 (1976).
6. *N. D. Sen Gupta.* J. Phys., 3A, 618 (1970).
7. *N. K. Rahman.* Phys. Lett., 54A, 8 (1975).
8. *Э. Т. Уиттекер, Дж. Ватсон.* Курс современного анализа, Физматгиз, 1963, т. I, II.

ՔՎԱԶԻԷՆԵՐԳԵՏԻԿ ՄԱԿԱՐԴԱԿՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՎԱՐՔԸ

Կ. Խ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Ուժեղ մոնոխրոմատիկ դաշտում բազմամակարդակ սիստեմի քվազիէներգետիկ մակարդակները հետազոտվել են նոր եղանակով։ Արդյունքների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ նրանք չէին կարող ստացվել ստանդարտ ասիմպտոտիկ մեթոդներով։ Արդյունքների ճշգրտության մեծացման համար միաժամանակ կիրառվել է նաև Հիլի մեթոդը։ Մասնավորապես, մանրամասն ուսումնասիրվել են երկ- և եռամակարդակային սիստեմները։ Դաշտի լարվածության պարամետրի ասիմպտոտիկ մեծ արժեքների դեպքում քվազիէներգիայի վարքը նկարագրող բանաձևերը ստացվել են առաջին անգամ։

ASYMPTOTICAL BEHAVIOUR OF QUASI-ENERGY LEVELS

K. Kh. SIMONYAN

Quasi-energy states of amultilevel quantum system in an asymptotically strong monochromatic field are considered in a novel way. The analysis of the results shows that they could not be obtained by means of standard asymptotical methods. The Hill method is simultaneously used to increase the accuracy of the results. In particular, the two- and three-level systems are discussed in detail. The formulas describing the behaviour of quasi-energy states in the case of asymptotically large values of the field intensity parameter are obtained for the first time.