Изв. АН Армянской ССР, Физика, 13, 458—463 (1978

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЛОЖЕННЫХ САМОГРАВИТИРУЮЩИХ ХОЛОДНЫХ ДИСКОВ

М. Г. АБРАМЯН

Рассмотрены эффекты влияния сфероидальной гравитирующей массы на равновесие и устойчивость холодных маклореновских дисков по отношению к симметричным и мембранным возмущениям. Сфероид оказывает стабилизирующее воздействие на осцилляции вложенного диска.

Известно, что спиральные галактики состоят из ряда подсистем, отличающихся степенью их сферичности, средней плотностью массы, кинематическими характеристиками и т. д. Наличие сфероидальных подсистем должно каким-то образом влиять на поведение плоских подсистем галактик, где выражается спиральность структуры. Между тем обычно используемая модель спиральной галактики в виде тонкого быстро вращающегося диска практически не учитывает это влияние.

Учет влияния сферических подсистем проводился кинетическим методом, путем вычисления инкремента раскачки спиральных волн, соответствующей эффекту типа пучковой неустойчивости (см. [1—3]). В работах [4—6] было исследовано гравитационное влияние сфероидальных масс на поведение вложенных в них вращающихся подсистем. В частности, оказалось, что учет влияния гравитации сфероидальных подсистем на равновесие и устойчивость плоских дисков может привести к заметным эффектам [7—9].

В настоящей работе исследуется гравитационное действие однородной сфероидальной массы (с плотностью ρ_* и эксцентриситетом e_*) на равновесие и устойчивость маклореновского холодного диска, заключенного внутри сфероида и расположенного в плоскости симметрии.

Равновесные параметры одиночного маклореновского диска таковы: угловая скорость вращения

$$\Omega_0^2 = \frac{3\pi G M_0}{4R^3}, \tag{1}$$

поверхностная плотность распределения массы

$$\sigma = \frac{3M_0}{2\pi R^2}\,\xi = \frac{3M_0}{2\pi R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2}, \tag{2}$$

где R и M_0 — соответственно радиус и масса диска.

Устойчивость этих дисков подробно исследована в работах [10, 11]. Было показано, что они устойчивы по отношению к мембранным колебаниям, искривляющим плоскость диска по закону

$$h(\xi, \varphi, t) = \frac{1}{\xi}\, P^m_{2n+m-1}(\xi)\exp\{i(\omega t - m\varphi)\},\ (n-m) \text{ — четно}, \tag{3}$$

где $P_k^l(\xi)$ — присоединенная функция Лежандра, ω — частота возмущений, φ — азимутальный угол; среди возмущений в плоскости диска устойчивы только аксиально-симметричные моды с $n = 2$, $m = 0$ (однородное сжатие и расширение диска).

Исследуем эффекты, обусловленные наличием гравитирующего сфероида. В равновесии поверхностная плотность массы опять выражается формулой (2), в то время как из условия компенсации центробежных и гравитационных сил следует, что вложенным дискам соответствует большее значение угловой скорости вращения

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 + \Omega_*^2 = \Omega_0^2\left(1 + \frac{M_*}{M_0} A_*^2\right), \tag{4}$$

где Ω_*^2 представляет эффект гравитации сфероидальной подсистемы, M_* — ее масса, а

$$A_*^2 = \frac{2}{\pi e_*^3}\,(\arcsin e_* - e_* \sqrt{1 - e_*^2}). \tag{5}$$

Функция A_*^2 принимает значения в интервале $4/3\pi \div 1$; при этом для сферических подсистем $A_*(0) = 4/3\pi$, а для сильно сплюснутых — $A_*(1) = 1$.

Исследуем устойчивость вложенных дисков по отношению к симметричным и мембранным возмущениям.

1. *Возмущения в плоскости диска*. Принимая, что зависимость возмущенных параметров от φ и t имеет вид

$$\exp\{i(\omega t - m\varphi)\}, \tag{6}$$

согласно методу работы [10] получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$1 + \frac{4\,\Omega_0^2 \gamma_n^m}{\lambda^2 - 4\,\Omega^2}\left(n^2 + n - m - \frac{2\,m\Omega}{\lambda}\right) = 0,\ (n-m) \text{ — четно}, \tag{7}$$

где n, m — соответственно степень и порядок присоединенной функции Лежандра, $\lambda = \omega - m\Omega$, Ω_0 и Ω выражаются формулами (1) и (4),

$$\gamma_n^m = \frac{(n+m)!\,(n-m)!}{2^{2n+1}\left[\left(\frac{n+m}{2}\right)!\right]^2\left[\left(\frac{n-m}{2}\right)!\right]^2}. \tag{8}$$

Уравнение (7) является кубическим относительно ω, однако существуют две разные формы возмущений, для которых оно обращается в квадратное.

а) *Осесимметричные возмущения* ($m=0$). Для них уравнение (7) дает следующий спектр частот:

$$\omega^2 = 4\,\Omega^2\left\{1 - \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\,\frac{n\,(n+1)\,(n!)^2}{2^{2n+1}\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^4}\right\},\ n \neq 0. \tag{9}$$

Так как

$$\frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} = 1 + \frac{M_*}{M_0} A_*^2 \equiv \varkappa^{-1} > 1, \tag{10}$$

то ясно, что сфероидальная подсистема оказывает стабилизирующее влияние на осесимметричные возмущения вложенного диска. При этом эффект стабилизации тем сильнее, чем больше M_{*}/M_0 и чем сильнее сплюснут сфероид.

Для данного значения $\varkappa$ существуют области устойчивых и неустойчивых мод колебаний. С ростом $\varkappa^{-1}$ область устойчивых мод расширяется. Так, например, если для одиночных дисков ($\varkappa = 1$) устойчивым является только мода с $n = 2$, то вложенный диск с $\varkappa = 0{,}5$ устойчив относительно мод с $n = 2, 4, 6, 8$. Остальные моды неустойчивы; при этом их инкремент возрастает с ростом n, т. е. с уменьшением размеров возмущений. Воспользовавшись при больших n формулой Стирлинга, получаем

$$\omega^2 \simeq 4\,\Omega^2\left(1 - \varkappa\frac{n}{\pi}\right). \tag{11}$$

Если самогравитация диска пренебрежимо мала по сравнению с гравитацией сфероида, то вложенный диск практически устойчив, так как при этом характерный размер неустойчивости $\lambda \sim 2R/n$ стремится к нулю. По-видимому, такова ситуация в галактиках, где диски межзвездной среды содержат относительно ничтожную долю массы. Ясно, что поведение таких дисков диктуется гравитацией звездных дисков и сфероидальных подсистем. Для иллюстрации отметим, что для звездного диска нашей Галактики $\varkappa \simeq 0{,}2$ (все симметричные моды с $n < 16$ при этом устойчивы), а для диска межзвездной среды — на порядок меньше.

б) *Секториальные возмущения* ($n = m$). Спектр частот этих мод получается в виде

$$\omega_{1,2} = \Omega\left[m - 1 \pm \left(1 - 4\varkappa m\gamma_m^m\right)^{1/2}\right]. \tag{12}$$

Одиночные диски являются нейтрально-устойчивыми ($\omega = 0$) по отношению к моде $m = 1$. Это понятно, так как возмущение с $m = 1$ соответствует смещению диска как целого (остальные моды с $m > 1$ неустойчивы). Для вложенных дисков возмущение с $m = 1$ не является тривиальным, так как любое отклонение центра инерции диска от равновесного положения (центра системы) препятствуется гравитацией сфероидальной подсистемы, вследствие чего возникают колебания с частотой $\omega = \pm\Omega_{*}$.

Наибольший интерес представляет бароподобная мода $m = 2$, которая стабилизируется, если $\varkappa \lesssim 2/3$. При этом имеем формулу

$$\omega_{1,2} = \Omega\left\{1 \pm \left(1 - \frac{3}{2}\varkappa\right)^{1/2}\right\}, \tag{13}$$

которая представляет собой две азимутальные, отстающие от диска волны, распространяющиеся соответственно с угловыми скоростями $\Omega_{1p} = \omega_1/2$ («быстрая» волна) и $\Omega_{2p} = \omega_2/2$ («медленная» волна). При уменьшении значения $\varkappa$ «быстрая» волна ускоряется, а «медленная» — замедляется. В предельном случае, когда самогравитацией диска можно пренебречь по сравнению с гравитацией сфероидальной подсистемы ($\varkappa \to 0$, $\Omega \to \Omega_{*}$), бароподобная мода допускает тривиальное решение и вместо (13) получаем $\omega_1 = 2\Omega_{*}$, $\omega_2 = 0$. Первое из этих решений представляет собой вращающийся с угловой скоростью $\Omega_{1p} = \Omega_*$ бар, а второй — невращающийся бар. Возмущения с $m > 2$ являются колебательными и не допускают тривиального решения.

Исследуем общий случай $n > m > 0$. С учетом обозначений

$$2\alpha = -\varkappa m \gamma_n^m, \quad 3\beta = -1 + \varkappa (n^2 + n - m^2) \gamma_n^m \tag{14}$$

дисперсионное уравнение (7) примет вид

$$\left(\frac{\lambda}{2\Omega}\right)^3 + 3\beta\left(\frac{\lambda}{2\Omega}\right) + 2\alpha = 0. \tag{15}$$

Для одиночных дисков дискриминант кубического уравнения $D = \alpha^2 + \beta^3$ всегда положителен, так что все моды рассматриваемых возмущений неустойчивы.

Стабилизирующее воздействие внешнего сфероида проиллюстрируем рассмотрением двух частных случаев. Сначала исследуем случай

$$\varkappa (n^2 + n - m^2) \gamma_n^m \ll 1. \tag{16}$$

Так как множитель при $\varkappa$ всегда больше единицы (минимальное значение его равно 33/32), то условие (16) выражает пренебрежимость самогравитации диска по сравнению с гравитацией сфероидальной подсистемы $\simeq 2\ {}^2_0/\Omega_* \ll 1$). При этом дискриминант $D \simeq \beta^3$ отрицателен и уравнение (15) имеет три действительных решения, которые в линейном приближении по $\varkappa$ имеют вид

$$\omega_{1,2} = \Omega_* [m \pm 2 \mp \varkappa (n^2 + n - m^2 \mp m) \gamma_n^m],$$
$$\omega_3 = \Omega_* m (1 - 2\varkappa \gamma_n^m). \tag{17}$$

Им соответствуют три азимутальные волны, распространяющиеся по диску с отличными от Ω_* угловыми скоростями. При этом первая волна имеет скорость $\Omega_p = \omega_1/m$ и опережает диск, а две другие — отстают от диска. В предельном случае $\varkappa = 0$ следует независимость частот от порядка возмущений n:

$$\Omega_{1,2p} = \Omega_* \left(1 \pm \frac{2}{m}\right), \ \Omega_{3p} = \Omega_*.$$

При больших значениях номера мод m все три волны сливаются и распространяются в направлении вращения диска со скоростью Ω_*.

Итак, при условии (16) имеем устойчивые азимутальные волны и поведение диска, в основном, диктуется гравитацией сфероидальной массы. В ходе последних рассуждений мы предполагали (кроме случая $\varkappa = 0$), что порядок возмущений n не слишком велик и для данного $\varkappa$ ограничен условием (16). Очевидно, что для каждого $\varkappa$ существует область значений n, в которой

$$\varkappa (n^2 + n - m^2) \gamma_n^m \gg 1. \tag{18}$$

Так как $\varkappa \leqslant 1$, то (18) предполагает коротковолновые возмущения ($n \gg 1$). При этом дискриминант уравнения (15) положителен и для больших значений ($n-m$) получаем следующие решения:

$$\omega_1 = m\Omega\left(1 + \frac{2}{n^2+n-m^2}\right),$$
$$\omega_{2,3} = m\Omega\left(1 - \frac{1}{n^2+n-m^2}\right) \pm i\,\frac{2\,\Omega_0}{\sqrt{\pi}}\,(n^2-m^2)^{1/4}. \tag{19}$$

Характерно, что время нарастания неустойчивых возмущений

$$\tau \sim \frac{1}{\Omega_0\,(n^2-m^2)^{1/4}} \tag{20}$$

зависит от Ω_0, а не от угловой скорости вращения вложенного диска. Итак, в рассматриваемом случае имеем неустойчивость. Этот результат находится в согласии с [12]. Наличие сфероидальной подсистемы только перемещает неустойчивость в область более коротких волн.

2. *Мембранные колебания вложенного диска.* Если диск подвергается возмущениям, изгибающим его плоскость, то вертикальные смещения $h(\xi, \varphi, t)$ должны удовлетворять уравнению движения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 h(\xi, \varphi, t) = F + F_*, \tag{21}$$

где F — гравитационная сила, действующая на возмущения диском, F_* — перпендикулярная к плоскости диска внешняя сила.

Представляя вертикальное смещение в виде (3), пользуясь выражением F из [11] и учитывая, что в рассматриваемой задаче F_* есть вертикальная составляющая силы, действующей внутри однородного сфероида,

$$F_* = -\frac{3\pi G M_*}{4R^3}\,C_*^2, \tag{22}$$

где

$$C_*^2 = \frac{\pi(1-A_*^2)}{\sqrt{1-e_*^2}} \geqslant A_*^2,\ (e_* \neq 1),$$

из (21) получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$(\omega - m\Omega)^2 = 4\,\Omega_0^2\left(\Gamma_n^m - \frac{1}{2}\right) + \Omega_*^2\,\frac{C_*^2}{A_*^2}, \tag{23}$$

где

$$\Gamma_n^m = \frac{(2n-1)!\,(2m+2n-1)!}{2^{2m+4n-3}[(n-1)!]^2[(n+m-1)!]^2}. \tag{24}$$

Здесь $\Gamma_n^m \geqslant 1/2$ для любых n, m. Следовательно, как для одиночного, так и для вложенного диска уравнение (23) дает вещественные частоты.

В связи с наблюдаемым изгибом диска межзвездной среды в нашей и в ряде других галактик наибольший интерес представляют колебания с $m = 1$. Рассмотрим простейшую моду этого класса возмущений — $n = m = 1$. При этом из уравнения (23) имеем

$$\omega_{1,2} = \Omega \pm \left(\Omega_0^2 + \Omega_*^2 \frac{C_*^2}{A_*^2}\right)^{1/2}. \quad (25)$$

Следогательно в общем случае эта мода не является тривиальной для вложенных дисков. Только в случае, когда $e_* = 0$ (сферическая подсистема $A_*(0) = C_*(0)$), мода $m = 1$ допускает тривиальное решение.

Сфероидальный характер внешней гравитирующей массы приводит к возможности получения тривиальных решений и при $m > 1$. Действительно, в предельном случае $\varkappa \to 0$ уравнение (23) дает

$$\omega_{1,2} = \Omega_*(m \pm C_*/A_*).$$

В зависимости от значения $C_*/A_* \geqslant 1$, т. е. от степени сплюснутости сфероидальной подсистемы вложенный диск может оказаться нейтрально-устойчивым по отношению к модам $m > 1$. При этом порядок m тривиальной моды тем выше, чем сильнее сплюснута сфероидальная подсистема.

Ереванский государственный
университет

Поступила 23.XII.1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. A. Kaplan, S. B. Pikel'ner.* Ann. Rev. Astron. &Ap., 12. 133 (1974).
2. *Л. С. Марочник, А. А. Сучков.* УФН, 112, 219 (1974).
3. *В. Л. Поляченко, А. М. Фридман.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, Изд. Наука, М., 1976.
4. *М. Г. Абрамян, С. А. Каплан.* Астрофизика, 10, 565 (1974).
5. *М. Г. Абрамян, С. А. Каплан.* Астрофизика, 11, 121 (1975).
6. *М. Г. Абрамян.* Астрофизика, 11, 487 (1975).
7. *М. Г. Абрамян, Р. С. Оганесян.* Астрофизика, 13, 253 (1977).
8. *М. Г. Абрамян, Р. С. Оганесян.* Астрофизика, 14, 129 (1978).
9. *М. Г. Абрамян.* Астрофизика, 14, № 4 (1978).
10. *C. Hunter.* MNRAS, 123, 299 (1963).
11. *C. Hunter, A. Toomre.* Astrophys. J., 155, 747 (1969).
12. *A. Toomre.* Astrophys. J., 139, 1217 (1964).

ՆԵՐԴՐՎԱԾ ԻՆՔՆԱԳՐԱՎԻՏԱՑՎՈՂ ՍԱՌԸ ՍԿԱՎԱՌԱԿՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Մ. Գ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

Դիտարկված են սֆերոիդալ գրավիտացվող զանգվածների ազդեցությունը սառը մակլորենյան սկավառակների հավասարակշռության և կայունության վրա։ Ստացված են ներդրված սկավառակների առանցքային համաչափ և մեմբրանային տատանումների սպեկտրները և ցույց է տրված սֆերոիդալ զանգվածի կայունացնող ազդեցությունը քննարկվող տատանումների վրա։

THE STABILITY OF COLD SELF-GRAVITATING INSERTED DISCS

M. G. ABRAMYAN

The effect of a spheroidal gravitating mass on the equilibrium and stability of McLauren cool discs with regard to symmetrical and membrane perturbations is considered. The spectrum of oscillations has been found and the stabilizing influence of the spheroidal mass on the perturbations considered was established.