Изв. АН Армянской ССР, Физика, 13, 235—237 (1978)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ДЕКАРТОВЫМИ И ПОЛЯРНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ КРУГОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА И ДИНАМИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ O(3)

Г. С. ПОГОСЯН, В. М. ТЕР-АНТОНЯН

В предыдущей работе [1] из асимптотических соображений было найдено преобразование, связывающее декартовы и полярные волновые функции кругового осциллятора. Здесь мы обсуждаем тот же вопрос с позиций скрытой или динамической группы симметрии O(3), относительно которой, как известно [2], инвариантен гамильтониан кругового осциллятора.

Введем векторы состояний

$$\Phi_{n_1 n_2}(x,\ y) = (-i)^{n_2}\, \Psi_{n_1 n_2}(x,\ y), \tag{1}$$

$$\Phi_{pm}(r,\ \varphi) = (-1)^{p}\, \Psi_{pm}(r,\ \varphi), \tag{2}$$

где $\Psi_{n_1 n_2}(x,\ y)$ и $\Psi_{pm}(r,\ \varphi)$ — нормированные декартовы и полярные волновые функции кругового осциллятора:

$$\Psi_{n_1 n_2}(x,\ y) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \frac{H_{n_1}(\sqrt{\lambda}x)\, H_{n_2}(\sqrt{\lambda}y)}{\sqrt{2^{n_1+n_2}(n_1)!(n_2)!}}\, e^{-\frac{\lambda}{2}(x^2+y^2)}, \tag{3}$$

$$\Psi_{pm}(r,\ \varphi) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{\lambda^{|m|}(p+|m|)!}{(p)!}}\, \frac{r^{|m|}}{(|m|)!}\, e^{-\frac{\lambda}{2}r^2}\, e^{im\varphi} F(-p,|m|+1,\lambda r^2). \tag{4}$$

Квантовые числа n_1, n_2, p, $|m|$ пробегают целые неотрицательные значения, а $\lambda = m\omega/\hbar$.

Векторы состояний (1) и (2), соответствующие одному уровню энергии, связаны унитарным преобразованием [1]

$$\Phi_{n_1 n_2}(x,\ y) = \sum_{m=-n_1-n_2}^{n_1+n_2} d^{\frac{n_1+n_2}{2}}_{\frac{m}{2},\ \frac{n_1-n_2}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Phi_{\frac{n_1+n_2-|m|}{2},\ m}(r,\ \varphi), \tag{5}$$

в котором суммирование ведется по значениям m, имеющим четность суммы n_1+n_2, а d — известная функция Вигнера, фаза которой выбрана согласно монографии [3]. Соотношение (5) формально совпадает с законом преобразования волновых функций с определенным моментом и его проекцией при вращении. Покажем, что эти операторы момента совпадают с известными генераторами группы O(3) кругового осциллятора. С этой целью перейдем в гамильтониане

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2(x^2+y^2)}{2}$$

к безразмерным переменным $\xi=\sqrt{\lambda}\,x$, $\eta=\sqrt{\lambda}\,y$ и параметру $\varepsilon=E/\hbar\omega$. В результате уравнение Шредингера запишется в виде

$$\hat{H}\Psi=\varepsilon\Psi,$$

где

$$\hat{H}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial}{\partial\eta^2}\right)+\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2). \qquad (6)$$

Гамильтониан (6) инвариантен относительно группы O(3), генераторами которой являются операторы [2]

$$\hat{J}_1=\frac{1}{2}\left(\xi\eta-\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\right),$$

$$\hat{J}_2=\frac{1}{2i}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right),$$

$$\hat{J}_3=\frac{1}{4}\left(\xi^2-\eta^2-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right).$$

Легко показать, что эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{J}_i,\ \hat{J}_k]=ie_{ikl}\hat{J}_l,$$

справедливым для декартовых компонент момента, коммутируют с гамильтонианом и связаны с последним уравнением

$$\hat{J}^2=\hat{J}_1^2+\hat{J}_2^2+\hat{J}_3^2=\frac{1}{4}(\hat{H}^2-1).$$

Пользуясь явным видом операторов $\hat{J}_i$, находим

$$\hat{J}^2\Phi_{n_1n_2}(x,\ y)=\frac{n_1+n_2}{2}\left(\frac{n_1+n_2}{2}+1\right)\Phi_{n_1n_2}(x,\ y),$$

$$\hat{J}_3\Phi_{n_1n_2}(x,\ y)=\frac{n_1-n_2}{2}\Phi_{n_1n_2}(x,\ y),$$

$$\hat{J}^2\Phi_{pm}(r,\ \varphi)=\left(p+\frac{|m|}{2}\right)\left(p+\frac{|m|}{2}+1\right)\Phi_{pm}(r,\ \varphi),$$

$$\hat{J}_2\Phi_{pm}(r,\ \varphi)=\frac{m}{2}\Phi_{pm}(r,\ \varphi).$$

Следовательно, переход от декартовых координат к полярным есть вращение трехмерной системы координат на угол $\pi/2$ вокруг оси, вдоль которой берется проекция $\hat{J}_1$. Таким образом, появление d-функции в преобразовании (5) тесно связано с динамической группой симметрии кругового осциллятора.

Ереванский государственный
университет

Поступила 10.VII.1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. С. Погосян, В. М. Тер-Антонян, Г. Т. Торосян.* Препринт ПЛРФ-77-04, Ереван, 1977.
2. *С. П. Аллилуев.* ЖЭТФ, 33, 200 (1957).
3. *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалёв, В. К. Херсонский.* Квантовая теория углового момента, Изд. Наука, Л., 1975.

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՍՑԻԼՅԱՏՈՐԻ ԴԵԿԱՐՏՅԱՆ ԵՎ ԲԵՎԵՌԱՅԻՆ ԱԼԻՔԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԱՊԸ ԵՎ ԴԻՆԱՄԻԿ $O(3)$ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գ. Ս. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Վ. Մ. ՏԵՐ-ԱՆՏՈՆՅԱՆ

Դիտարկված է շրջանային օսցիլյատորի դեկարտյան և բևեռային ալիքային ֆունկցիաների կապը թաքնված $O(3)$ համաչափության տեսանկյունից։

THE CONNECTION BETWEEN CARTESIAN AND POLAR WAVE FUNCTIONS OF A CIRCULAR OSCILLATOR AND THE DINAMICAL $O(3)$ SYMMETRY

G. S. POGOSYAN, V. M. TER-ANTONYAN

A direct connection between the Cartesian and polar wave functions of circular oscillator is discussed from the latent $O(3)$ symmetry viewpoint.