

О ПРИГОТОВЛЕНИИ СОСТОЯНИЙ СОСТАВНЫХ СИСТЕМ

С. Г. ХАРАТЯН

Применительно к квантовым составным системам с конечным числом степеней свободы построена схема, позволяющая приготавливать произвольное состояние, не определяемое по проекциям на подсистемы, из состояния, определяемого проекциями.

Одним из основных квантовых постулатов [1, 2] является утверждение, что (по крайней мере концептуально) все состояния системы могут быть приготовлены, а наблюдаемые—измерены. В настоящее время имеется большое количество работ, в которых рассматриваются различные аспекты этого постулата (см. сборники [3, 4] и ссылки в них). В настоящей работе мы попытаемся показать, что применительно к нерелятивистским составным системам с конечным числом степеней свободы можно исходить из ослабленной формулировки этого постулата.

Для составных систем целесообразно, следуя фон Нейману [5], разделить множество состояний на два класса: состояния, определяемые своими проекциями на подсистемы (состояния первого класса), и прочие состояния (состояния второго класса). Приготовление состояний первого класса сводится к приготовлению соответствующих проекций на подсистемы и не вызывает дополнительных проблем. Представляется разумным предложить схему, в которой состояния второго класса приготавливаются из состояний первого класса, так что можно ограничиться постулатом о концептуальной приготовимости состояний только первого класса. Существенные детали схемы — включение «косвенного» взаимодействия между подсистемами посредством варьируемой внешней системы и гамильтоновость эволюции полной системы. При этом мы не конкретизируем вид O -множества наблюдаемых составной системы, зато предполагаем, что множество ограниченных наблюдаемых подсистемы, считаемой в каком-то смысле элементарной, есть $B_h(H)$ (множество эрмитовых элементов алгебры фон Неймана $B(H)$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H ; в литературе, например, [6], указывалось на желательность физической мотивировки выбора в качестве множества ограниченных наблюдаемых составной системы, состоящей из двух подсистем, $O = B_h(H_1 \times H_2)$). В этой связи отметим, что такой вид O у нас получается как следствие.

Итак, мы рассматриваем нерелятивистские квантовые системы с конечным числом степеней свободы S_i , $i=1, 2, 3$. Системы S_i считаем в каком-то смысле элементарными, так что множества ограниченных наблюдаемых O_i совпадают с $B_h(H_i)$. Системы S_1 и S_2 заданы, и нас интересует проблема их объединения в составную систему S_{1+2} . Напротив, «внешняя» система S_3 будет варьироваться (чтобы реализовать различные «косвенные» взаимодействия между S_1 и S_2). Состояния системы S_i — суть нормальные положительные функционалы над

$B_h(N_i)$, так что множество чистых состояний системы совпадает с множеством векторных состояний E_{φ_i} , $\varphi_i \in N_i$, $\varphi_i \neq 0$.

В отношении составной системы S_{1+2} (и аналогично, вспомогательных составных систем S_{1+2+3} , S_{i+3} при $i=1, 2$) ограничимся следующими предположениями. Ограниченные наблюдаемые составной системы S_{1+2} образуют некое линейное многообразие в $B_h(N_1 \times N_2)$, а состояния — суть нормальные положительные функционалы над O_{1+2} ; если $B \in O_{1+2}$, то $f(B) \in O_{1+2}$. Каждой наблюдаемой A_1 системы S_1 соответствует наблюдаемая составной системы $A_1 \times I_2$, где I_2 — единичный оператор в N_2 . Аналогичным предполагается вложение O_2 в O_{1+2} . Заметим, что все векторные состояния вида $E_{\varphi_1 \times \varphi_2}$ являются чистыми, поскольку даже наблюдаемых вида $A_1 \times I_2 + I_1 \times A_2$, где A_i пробегает $B_h(N_i)$, достаточно, чтобы установить неразложимость векторных функционалов вида $E_{\varphi_1 \times \varphi_2}$. Легко видеть, что состояние системы S_{1+2} является состоянием первого класса лишь тогда, когда его проекция хотя бы на одну из подсистем является чистым состоянием. В частности, векторное состояние $E_{\varphi_{1+2}}$ является состоянием первого класса тогда и только тогда, когда $\varphi_{1+2} = \varphi_1 \times \varphi_2$.

Как многократно отмечалось (см., например, [5, 7]), в квантовой теории изменение состояний осуществляется двумя способами — временной эволюцией и редукцией состояний при измерениях. Временная эволюция всех рассматриваемых систем предполагается гамильтоновой, причем образом чистого состояния является чистое состояние. Относительно редукции состояний при измерениях слабейшее предположение состоит в том, что измерение каждого проектора есть чистая операция в смысле [8, 9], т. е. переводит чистые состояния в чистые.

Обратимся к задаче приготовления состояний составной системы S_{1+2} . В нашей схеме мы намереваемся приготовление произвольного состояния системы S_{1+2} свести посредством двух указанных способов изменения состояний к приготовлению состояний первого класса, т. е. к считаемым заданными процедурам приготовления состояний подсистем S_1 и S_2 . Для этой цели недостаточно рассмотрения лишь систем S_1 и S_2 . В случае невзаимодействующих S_1 и S_2 состояния первого класса переходят при временной эволюции только в состояния первого класса. В случае взаимодействующих S_1 и S_2 , как отмечалось в [10, 11], состояния первого класса переходят в состояния второго класса, однако при гамильтоновой эволюции образ множества векторов, представляющих состояния первого класса, вообще говоря, не плотен в $N_1 \times N_2$. В случае дискретного спектра гамильтониана H_{1+2} это легко следует из рассмотрения собственных векторов гамильтониана, не представимых в виде $\varphi_1 \times \varphi_2$. Повтому воспользуемся возможностью варьировать взаимодействие между S_1 и S_2 косвенным образом, при помощи включения взаимодействия подсистем S_1 и S_2 с внешней системой S_3 . При этом необходимо предположить, что S_3 можно варьировать в достаточно широких пределах. Смысл последнего требования будет ясен из дальнейшего.

Рассмотрим временную эволюцию составной системы S_{1+2+3} , которая определяется видом взаимодействия между S_1 и S_2 и S_2 и S_3 . Тогда в результате временной эволюции от t_0 к t_1 начальное состояние $E_{\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3}$, вообще говоря, переходит в некоторое конечное состояние E_ψ , не представимое ни в одном из видов $E_{\varphi_1 \times \varphi_2}$ и $E_{\varphi_2 \times \varphi_3}$. Предположим, что в некотором ортонормированном базисе $\{\varphi_3^n\}$ в H_3 вектор конечного состояния имеет вид $\psi = \sum_n \varphi_1^n \times \varphi_2^n \times \varphi_3^n$, и пусть N — подмножество номеров n , такое, что $\varphi_1^n \neq 0$ и $\varphi_2^n \neq 0$. Если системы векторов $\{\varphi_i^n\}$ при $i = 1, 2$ натягивают более чем одномерные подпространства в H_i , то найдутся такие номера k и l , что φ_1^k и φ_1^l , а также φ_2^k и φ_2^l комплексно неколлинеарны. Тогда, переходя к новому базису $\{\varphi_3^{1n}\}$ посредством подходящего двумерного поворота

$$\varphi_3^{1k} = \cos \theta \varphi_3^k + \sin \theta \varphi_3^l, \quad \varphi_3^{1l} = \cos \theta \varphi_3^k - \sin \theta \varphi_3^l, \quad \varphi_3^{1n} = \varphi_3^n, \quad n \neq k, n \neq l,$$

мы видим, что в новом базисе $\{\varphi_3^{1n}\}$ вектор ψ не представим в упомянутом выше виде. Это рассуждение показывает, что представимость вектора ψ в указанном виде в произвольном базисе в H_3 означает, что хотя бы при одном i ($i = 1, 2$) все векторы $\{\varphi_i^n\}_{n \in N}$ коллинеарны, что эквивалентно чистоте проекции состояния E_ψ на подсистему S_i . Следовательно, представимость вектора конечного состояния в указанном виде при произвольном начальном состоянии $E_{\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3}$, при всех t_1 и при любом выборе базиса в H_3 означала бы, что одна из систем S_1 и S_2 в каждый момент времени находится в чистом состоянии, т. е. она не участвовала бы во взаимодействии, что не согласуется с выбором внешней системы S_3 .

Таким образом, существуют начальное состояние $E_{\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3}$, базис $\{\varphi_3^n\}$ в H_3 и момент времени t_1 такие, что вектор конечного состояния имеет вид $\psi = \sum_n \varphi_{1+2}^n \times \varphi_3^n$, где хотя бы при одном n $E_{\varphi_{1+2}^n}$ является состоянием второго класса системы S_{1+2} . Произведя измерение проектора $P_{\varphi_3^n}$ над S_3 , мы редуцируем состояние системы S_{1+2+3} к чистому состоянию $E_{\varphi_{1+2}^n} \times \varphi_3^n$, а система S_{1+2} оказывается в чистом состоянии $E_{\varphi_{1+2}^n}$, которое является состоянием второго класса. Тем самым мы нашли способ, позволяющий приготовить некоторые состояния второго класса системы S_{1+2} , отправляясь от состояний первого класса, посредством косвенного взаимодействия. Разумеется, множество приготовимых таким путем состояний зависит от S_3 . Элементарным образом нетрудно убедиться, что для произвольного фиксированного состояния второго класса $E_{\varphi_{1+2}^n}$ системы S_{1+2} можно предложить такой модельный гамильтониан системы S_{1+2+3} , что состояние $E_{\varphi_{1+2}^n}$ может быть приготовлено посредством предложенной выше процедуры из некоторого состояния первого класса системы S_{1+2+3} . Гамильтониан полной системы имеет вид

$$H_{1+2+3} = H_1 \times I_2 \times I_3 + I_1 \times H_2 \times I_3 + I_1 \times I_2 \times H_3 + \\ + H_{1+2}^{int} \times I_3 + I_1 \times H_{2+3}^{int} + I_2 \times H_{1+3}^{int},$$

где H_{1+2}^{int} и H_{2+3}^{int} описывают взаимодействие между S_1 и S_2 , S_2 и S_3 . Выбирая H_{1+2}^{int} и H_{2+3}^{int} , описывающие взаимодействие между S_1 и S_2 и S_2 и S_3 произвольными самосопряженными операторами в $H_1 \times H_2$ и $H_2 \times H_3$, получаем искомое.

Итак, заставляя систему S_2 пробегать достаточно большое множество, мы можем приготовить произвольное чистое векторное состояние системы S_{1+2} (приготовление же произвольных смесей из чистых состояний есть стандартная статистическая процедура).

Наконец, приведем аргумент, показывающий, что множество ограниченных наблюдаемых составной системы S_{1+2} есть $B_h(H_1 \times H_2)$. Из чистоты всех векторных состояний следует, что два вектора представляют одно и то же состояние лишь тогда, когда принадлежат одному лучу. В этом случае, согласно [5], приготовимость чистого векторного состояния эквивалентна измерению соответствующего одномерного проектора. Коль скоро все одномерные проекторы из $B(H_1 \times H_2)$ — наблюдаемые, то согласно [2, 5] множество ограниченных наблюдаемых совпадает с $B_h(H_1 \times H_2)$. Вообще, согласно [12], из чистоты всех векторных состояний следует, что алгебра наблюдаемых фон Неймана есть $B(H_1 \times H_2)$.

Автор благодарит А. И. Оксак за многократные полезные обсуждения.

Институт математики
АН АрмССР

Поступила 25.III.1977

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Сигал. Математические проблемы релятивистской физики, Изд. Мир, М., 1968.
2. J. M. Jauch. Foundations of quantum mechanics, Reading, Mass., 1968.
3. Quantum theory and beyond, Cambridge University Press, N. Y. — London, 1971.
4. Lecture notes in physics, 29 (1975).
5. И. фон Нейман. Математические основы квантовой механики, Изд. Наука, М., 1964.
6. J. M. Jauch. Helv. Phys. Acta, 37, 293 (1964).
7. E. P. Wigner. Amer. J. Phys., 33, 648 (1963).
8. R. Haag. Lectures on elementary particles and quantum field theory, VII, V. 2, 1970.
9. K. Kraus. Lecture notes in physics, 29, 206 (1975).
10. G. G. Emch. Helv. Phys. Acta, 45, 1049 (1973).
11. E. Prugovecki. Quantum theory in Hilbert space, Akademik Press, 1971.
12. М. А. Наймарк. Нормированные кольца, Изд. Мир, М., 1969.

ԲԱՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ՍՏԱՅՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ս. Գ. ԽԱՐԱՏՅԱՆ

Աղատուիլան վերջավոր աստիճան ունեցող քվանտային բարդ համակարգերի համար կառուցված է սխեմա, որը թույլ է տալիս աստիճան արտեղիկաներով որոշվող վիճակներից կամայական վիճակ, որը չի որոշվում ենթահամակարգերի վրա ունեցած պրոյեկցիաներով:

ON THE PREPARATION OF COMPOSITE
SYSTEMS STATES

S. G. KHARATYAN

For quantum systems with finite number of the degrees of freedom the scheme is built in which an arbitrary state, which cannot be defined by its projections on subsystems, can be prepared from a state defined by the projections.