

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Л. Н. КОВАЛЬ

Отправляясь от аналогии с механикой классической релятивистской частицы и теорией релятивистских струн, выведены уравнения релятивистской поверхности. Показано, что релятивистские поверхности представляют собой среду, обладающую упругими свойствами и массой покоя. Изложенная теория иллюстрируется на примерах сферической и эллипсоидальной мембран.

1. Уравнение движения релятивистской поверхности

В последнее время в связи с развитием дуально-резонансной модели [1] была предложена и исследована теория релятивистских струн. Настоящая работа посвящена изучению релятивистских поверхностей. Последние представляют интерес, так как в литературе широко обсуждаются свойства классических решений нелинейных уравнений поля в виде стенок, пузырей и т. п. в качестве прообраза элементарной частицы [2, 3].

Перейдем к выводу уравнения движения релятивистской поверхности. При движении двумерной поверхности в четырехмерном пространстве она заметает некоторый объем. Будем исходить из принципа наименьшего действия

$$S = -v \int dV.$$

Для задания точек объема введем локальные координаты

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_i^0 \leq \alpha_i \leq \alpha_i', \quad x_\mu = x_\mu(\alpha)$$

и заметим, что для построения инвариантного объема у нас в распоряжении имеется 4-вектор гиперповерхности $d\sigma_\mu$. Определим dV как*

$$dV = \sqrt{-d\sigma^\mu d\sigma_\mu}. \quad (1)$$

Для расчета инвариантного объема в локальных координатах α определим ориентированный вектор гиперповерхности $d\sigma_\mu$. Введем контравариантный тензор 3-го ранга в виде внешнего произведения одномерных форм:

$$dV^{\rho\nu\sigma} = dx^\rho \wedge dx^\nu \wedge dx^\sigma.$$

Тогда

$$d\sigma_\mu = \frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma} dV^{\rho\nu\sigma}$$

* Знак минус в (1) выбран в силу псевдоевклидовости метрики.

и соответственно

$$d\sigma^2 = d\sigma_{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{6} dV_{\rho\nu\sigma} dV^{\rho\nu\sigma}. \quad (2)$$

Учитывая, что

$$dx_{\mu} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_{\mu}}{\partial a_i} da_i,$$

для $dV^{\rho\nu\sigma}$ получим

$$dV^{\rho\nu\sigma} = D^{\rho\nu\sigma} da_1 \wedge da_2 \wedge da_3 = D^{\rho\nu\sigma} d\alpha, \quad (3)$$

где

$$D^{\rho\nu\sigma} = \det \begin{vmatrix} x^{\rho a_1} & x^{\nu a_1} & x^{\sigma a_1} \\ x^{\rho a_2} & x^{\nu a_2} & x^{\sigma a_2} \\ x^{\rho a_3} & x^{\nu a_3} & x^{\sigma a_3} \end{vmatrix},$$

$$\text{а } x^{\lambda a_i} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial a_i}.$$

Подставляя (3) в (2), для инвариантного объема окончательно получим

$$dV = \sqrt{\frac{1}{6} dV_{\rho\nu\sigma} dV^{\rho\nu\sigma}} = \sqrt{\Delta} d\alpha, \quad (4)$$

где

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} \langle x^{a_1}, x^{a_1} \rangle & \langle x^{a_1}, x^{a_2} \rangle & \langle x^{a_1}, x^{a_3} \rangle \\ \langle x^{a_2}, x^{a_1} \rangle & \langle x^{a_2}, x^{a_2} \rangle & \langle x^{a_2}, x^{a_3} \rangle \\ \langle x^{a_3}, x^{a_1} \rangle & \langle x^{a_3}, x^{a_2} \rangle & \langle x^{a_3}, x^{a_3} \rangle \end{vmatrix},$$

$$\langle x^{a_i}, x^{a_j} \rangle = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial a_i} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial a_j} g^{\mu\nu}.$$

С учетом (4) действие S примет вид

$$S = \int_{\alpha_0}^{\alpha'} L d\alpha, \quad L = -\sqrt{\Delta}.$$

Варьируя действие, $x_{\mu} \rightarrow x_{\mu} + \delta x_{\mu}$, получим

$$\delta S = \sum_{i=1}^3 \int \frac{d\alpha}{da_i} \frac{\partial L}{\partial x_{\mu}^{a_i}} \delta x_{\mu} \Big|_{\alpha_i = \alpha_i^0}^{\alpha_i = \alpha_i'} - \sum_{i=1}^3 \int d\alpha \left[\frac{\partial}{\partial a_i} \frac{\partial L}{\partial x_{\mu}^{a_i}} \right] \delta x_{\mu}. \quad (5)$$

Выбирая α_1 в качестве параметра эволюции,

$$\delta x_{\mu}(\alpha_1 = \alpha_1^0) = \delta x_{\mu}(\alpha_1 = \alpha_1') = 0,$$

получим уравнение движения поверхности

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{\partial L}{\partial x_{\mu}^{a_i}} = 0$$

и ее границы

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\mu}^{\alpha_i}} \Big|_{\alpha_i = \alpha_i'} = 0.$$

Рассмотрим действие с незакрепленным верхним пределом интегрирования. Взяв вариационную производную по x_{μ} с помощью (5), для локального 4-импульса получим выражение

$$Q_{\mu}(\alpha) = \frac{\partial S}{\partial x_{\mu}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial x_{\mu}^{\alpha_i}} \delta(\alpha_i - \alpha_i');$$

α_i' — значение параметра α_i в заданной точке поверхности, δ -образный характер $Q_{\mu}(\alpha)$ соответствует локализации импульса на данной поверхности. Для полного импульса поверхности получим выражение

$$P_{\mu} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} Q_{\mu}(\alpha) d\alpha = \sum_{i=1}^3 \int \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial x_{\mu}^{\alpha_i}}.$$

Введем 4-вектор потока импульса через поверхности $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$ и $\alpha_3 = \text{const}$:

$$T_{\mu i} = \frac{\partial L}{\partial x_{\mu}^{\alpha_i}}.$$

Тогда

$$P_{\mu} = \sum_{i=1}^3 \int T_{\mu i} dS_i,$$

а уравнения движения запишем в дивергентной форме

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{\mu i}}{\partial \alpha_i} = 0. \quad (6)$$

В дальнейшем мы будем интересоваться движением двумерной поверхности в трехмерном пространстве. В качестве параметра эволюции мы выберем время в лабораторной системе ($\alpha_1 = t$). Для выяснения физического содержания излагаемой теории рассмотрим упрощенный вариант, когда на поверхности задана ортогональная система координат:

$$\langle x^{\alpha_i}, x^{\alpha_j} \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$L = -v \sqrt{(1-v^2) x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^2},$$

где $v = \dot{r}(t)$, а уравнения движения примут вид

$$\sum_{i=1}^3 \frac{x_{\mu}^{\alpha_i}}{x_{\alpha_i}^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{x_{\mu}^{\alpha_i}}{L} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{L}{x_{\alpha_i}^2} = 0. \quad (7)$$

Взяв в (7) временную компоненту, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{L}{1-v^2} = 0$$

или

$$v \sqrt{\frac{x_{a_2}^2 x_{a_3}^2}{1-v^2}} = f(a_2, a_3), \quad v = \text{const}, \quad [v] = ml^{-2}; \quad (8)$$

(8) соответствует закону сохранения энергии. Действительно, в ортогональной системе координат имеем

$$dS(a_2, a_3) = \sqrt{x_{a_2}^2 x_{a_3}^2} da_2 da_3,$$

Тогда $v dS/da_2 da_3$ есть масса поверхности в окрестности точки (a_2, a_3) , а все выражение, поделенное на $\sqrt{1-v^2}$, дает локальный закон сохранения энергии.

Полная энергия системы есть

$$E = \int_s \frac{v dS}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Введя дифференциал массы

$$dm = v dS,$$

для действия получим

$$S = - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_s \sqrt{1-v^2} dm. \quad (9)$$

Выражение (9) следует сравнить с действием классической частицы]

$$S = - m \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1-v^2} dt.$$

Видно, что релятивистские поверхности соответствуют некоторому непрерывному распределению масс. Действие релятивистской поверхности получается из действия классической частицы с массой dm , проинтегрированного по всей поверхности. Последнее следует положить в основу физического определения релятивистских поверхностей.

Здесь напрашивается аналогия с теорией гравитации. Если в общей теории относительности каждая точка пространства обладает структурой (определяемой метрическим тензором), то в теории релятивистских поверхностей каждая точка поверхности также обладает структурой, задаваемой локальной геометрией поверхности. Наиболее четко эта аналогия прослеживается при изучении движения частицы в гравитационном поле. Действие имеет вид

$$S = - m \int \sqrt{dx_\mu dx_\nu g^{\mu\nu}}, \quad g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(x).$$

Если при выводе уравнения движения частицы мы берем вариацию метрического тензора $\delta g^{\mu\nu}(x)$, то в теории релятивистских поверхностей аналогом является взятие вариации элемента поверхности δdS . В результате мы имеем некоторую полевую теорию с самодействием.

Дадим гамильтонову формулировку задачи. Релятивистские поверхности имеют вырожденный гамильтониан. Для построения гамильтонова формализма используем локально аналогию с механикой точечной релятивистской частицы (см. выше). Определим локальный 3-импульс поверхности

$$p(\alpha) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = v \sqrt{\frac{\dot{x}_2^2 \dot{x}_3^2}{1-v^2}} v, \quad p_i(\alpha) = T_{i1}$$

и локальный гамильтониан

$$H(\alpha) = p \dot{x} - L = v \sqrt{\frac{\dot{x}_2^2 \dot{x}_3^2}{1-v^2}}.$$

Видно, что гамильтониан определен верно, так как совпадает с энергией поверхности на единицу площади (α_2, α_3) (см. (8)).

Выразим гамильтониан через локальные импульсы:

$$H(\alpha) = \sqrt{p^2 + v^2 \dot{x}_2^2 \dot{x}_3^2}.$$

$H(\alpha)$ по форме совпадает с гамильтонианом релятивистской частицы, масса которой зависит от точки поверхности. Если для точечной частицы масса определяет некоторый запас постоянной потенциальной энергии, то в случае релятивистских поверхностей она эквивалентна некоторому потенциалу самодействия $\sim x^4$.

Полный гамильтониан системы есть

$$H = \iint_s H(\alpha) da_2 da_3 = \iint_s \sqrt{p^2 + v^2 \dot{x}_2^2 \dot{x}_3^2} da_2 da_3.$$

Найдем гамильтоновы уравнения движения. Вычислим вариацию H

$$\begin{aligned} \delta H &= \iint \left(\frac{\partial H}{\partial p} \delta p + \sum_{i=2}^3 \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_{\alpha_i}} \delta x_{\alpha_i} \right) da_2 da_3 = \\ &= \iint \left(\frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \sum_{i=2}^3 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_{\alpha_i}} \delta x \right) da_2 da_3 + \\ &+ \int da_2 \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_{\alpha_3}} \delta x \Big|_{\alpha_3=\alpha_3^0}^{\alpha_3=\alpha_3'} + \int da_3 \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_{\alpha_2}} \delta x \Big|_{\alpha_2=\alpha_2^0}^{\alpha_2=\alpha_2'}. \end{aligned} \quad (10)$$

Легко показать, что

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{H} = \dot{x}, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_{\alpha_i}} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha_i}}.$$

Используя уравнения движения (6), находим

$$\dot{\mathbf{p}} = - \sum_{i=2}^3 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_{\alpha_i}} = \sum_{i=2}^3 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_{\alpha_i}}.$$

В силу уравнений движения для концов поверхности последние два члена в (10) обращаются в нуль и окончательно получаем

$$\delta H = \iint (\dot{\mathbf{x}} \delta \mathbf{p} - \dot{\mathbf{p}} \delta \mathbf{x}) d\alpha_2 d\alpha_3,$$

откуда

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}.$$

Определим силы натяжения, которые существуют в поверхности. Используя аналогию с механикой точечной частицы, вычислим силу, действующую на элемент поверхности с массой dm . Дифференциал силы Минковского есть

$$dK_\mu = \frac{d}{d\tau} \left\{ dm \frac{dx_\mu}{d\tau} \right\}, \quad d\tau = \sqrt{1-v^2} dt.$$

С учетом (8) получаем

$$dK_\mu = \frac{\nu dS}{1-v^2} \frac{d^2 x_\mu}{dt^2}.$$

Для обычной силы имеем

$$dF_\mu = \sqrt{1-v^2} dK_\mu = \frac{\nu dS}{\sqrt{1-v^2}} \frac{d^2 x_\mu}{dt^2},$$

$$\frac{dF_\mu}{dS} = \frac{\nu}{\sqrt{1-v^2}} \frac{d^2 x_\mu}{dt^2}.$$

Поверхность будет оказывать на некоторое упругое тело давление

$$P = \frac{dF}{dS} \Big|_n = \frac{\nu}{\sqrt{1-v^2}} \ddot{\mathbf{x}} \Big|_n.$$

2. Некоторые примеры

Исследуем движение замкнутой сферически-симметричной мембраны. Можно было бы исходить из уравнения (7), записанного в сферических координатах. С самого начала проще записать действие в сферических координатах. Легко показать, что

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad L = -\nu R^2 \sqrt{1-\dot{R}^2}, \quad (11)$$

где $R = R(t)$ — радиус мембраны.

Используя уравнение Эйлера—Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \frac{\partial L}{\partial R},$$

получим уравнение движения

$$\ddot{R} \cdot R = -2(1 - \dot{R}^2). \quad (12)$$

Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \dot{R} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - L = \frac{\nu R^2}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}} = E = \text{const} \quad (13)$$

или

$$\frac{R^2}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}} = R_0^2, \quad R_0 = R|_{t=0}, \quad \dot{R}|_{t=0} = 0. \quad (14)$$

В частности, уравнение движения следует из (13) дифференцированием по t . С помощью (14) запишем (12) в виде

$$\ddot{R} = -\frac{2}{R_0^4} R^3. \quad (15)$$

Уравнение (14) совпадает с уравнением движения сильно-нелинейного осциллятора. Выражение для импульса есть

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \frac{\nu R^2}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}} \dot{R} = E \dot{R}. \quad (16)$$

Функция Гамильтона в переменных R, p имеет вид

$$H = \sqrt{p^2 + \nu^2 R^4}, \quad (17)$$

откуда следует, что движение сферической мембраны эквивалентно одномерному движению с релятивистской зависимостью между энергией и импульсом в поле потенциала $\sim R^4$. Легко проинтегрировать уравнение движения (14):

$$R = R_0 \text{Cn} \left[\sqrt{2} \frac{t}{R_0}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right],$$

где $\text{Cn}(x, k)$ — эллиптический косинус модуля k . Движение мембраны представляет собой процесс схлопывания с временем схлопывания $T = R_0 / \sqrt{2} \arccos 0 \cong R_0, 1, 3^*$.

Для давления получаем выражение

$$P = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}} \dot{R}. \quad (18)$$

С учетом (15) последнее примет вид

$$P = -\frac{2\nu}{R_0^3} R.$$

Следует обратить внимание на замечательную аналогию между (11), (13), (16), (17) и соответствующими уравнениями классической реля-

* С несколькими иными позициями движение сферической мембраны обсуждалось в [3].

тивистской частицы. Если ввести массу, зависящую от радиуса мембраны,

$$m(R) = \nu R^2,$$

то (11), (13), (16) и (17) перейдут а соответствующие уравнения для релятивистской частицы:

$$L = -m(R)\sqrt{1-\dot{R}^2}, E = \frac{m(R)}{\sqrt{1-\dot{R}^2}}, H = \sqrt{p^2 + m^2(R)}, p = \frac{m(R)}{\sqrt{1-\dot{R}^2}} \dot{R} = E\dot{R}.$$

С другой стороны, мембрана есть некоторая полевая система. Все сказанное указывает на существование корпускулярно-волнового дуализма, проявляющегося в полевых свойствах мембраны (локально) и в корпускулярных свойствах, связанных с движением мембраны как целого.

Релятивистские поверхности описывают движение некоторого векторного поля $x_\mu(z)$. В случае сферической мембраны векторное поле $x_\mu(z)$ описывается одной скалярной функцией $R(t)$, т. е. описывает поле со спином 0. Для сферической мембраны опишем возникающую физическую картину. Поле сосредоточено в шаре радиуса R_0 . В положении покоя ($\dot{R} = 0$, $R = R_0$) поле обладает массой покоя $E = \nu R_0^2$, однако оно не свободно; в положении покоя давление максимально ($p = -2\nu/R_0$). В момент схлопывания движение свободно ($p = -2\nu R/R_0^2 \rightarrow 0$), происходит со световой скоростью ($\dot{R} \rightarrow 1$) и нулевой массой ($m(R) = \nu R^2 \rightarrow 0$).

Представляет интерес проквантовать движение сферической мембраны. В этом случае вместо непрерывного спектра масс мы получим квантованные значения. Легко найти порядок кванта энергии поля. Из размерных параметров $\hbar$, ν , c , имеющихся в нашем распоряжении, можно сконструировать параметр размера длины $(\hbar/\nu c)^{1/2}$. Координата, энергия и импульс будут измеряться соответственно в единицах $r_0 = (\hbar/\nu c)^{1/2}$, $E = c^2 \nu r_0^2$ и $p = c \nu r_0^2$.

Наконец, можно произвести квазиклассическое квантование энергии, используя условие Бора—Зоммерфельда

$$\int_0^T p dR = (n + 1/2) \hbar,$$

что дает

$$E_n = n^{2/3} E_0.$$

Рассмотрим другой пример: движение мембраны около отрезка конечной длины 2ε (сферически-симметричный случай можно рассматривать как предел деформации отрезка в точку). Из соображений симметрии ясно, что формой мембраны будет эллипсоид вращения. Будем считать, что фокусы эллипса расположены на концах отрезка. Рассмотрим общий случай, когда длина малой оси эллипса в положении покоя много больше расстояния между фокусами. Тогда движение мембраны качественно будет процессом схлопывания около отрезка

длиной 2ε , последовательно проходящим через стадии сферической и цилиндрической симметрии.

Разделение переменных естественно искать в эллиптических координатах:

$$x = \varepsilon \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi \cos \vartheta,$$

$$y = \varepsilon \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi \sin \vartheta,$$

$$z = \varepsilon \operatorname{ch} \alpha \cos \varphi,$$

$$0 \leq \alpha \leq \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi;$$

при этом

$$\frac{x^2 + y^2}{\varepsilon^2 \operatorname{sh}^2 \alpha} + \frac{z^2}{\varepsilon^2 \operatorname{ch}^2 \alpha} = 1,$$

так что величины $R = \varepsilon \operatorname{sh} \alpha$ и $R_1 = \varepsilon \operatorname{ch} \alpha$ являются малой и большой полуосями эллипса. Для изучения движения эллиптической мембраны достаточно найти, как меняется со временем, скажем, малая полуось $R(t) = \varepsilon \operatorname{sh} \alpha(t)$.

Для действия получаем

$$S = -4\pi v \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{\pi/2} V \sqrt{1 - \varepsilon^2 [\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \varphi]} \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi \sqrt{\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Закон сохранения энергии принимает вид

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi \sqrt{\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \varphi}}{V \sqrt{1 - \varepsilon^2 [\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \varphi]} \alpha^2} d\varphi = \text{const.} \quad (19)$$

Интеграл (19) представляет в неявной форме некоторое нелинейное уравнение первого порядка для $R(t)$. В силу его сложности ниже мы проведем качественное исследование.

Пусть в положении покоя $R_0 = \varepsilon \operatorname{sh} \alpha_0 \gg \varepsilon$. Тогда $\alpha_0 \gg 1$, $R_0 \cong R_{10}$. В начальный момент движения ($R \gg \varepsilon$) уравнение (19) переходит в следующее:

$$\frac{R^2}{V 1 - R^2} = R_0^2,$$

т. е. движение мембраны является сферически-симметричным.

Движение поддается изучению также в релятивистской области ($\dot{R} \sim 1$), когда $R \lesssim \varepsilon$. Для этого запишем I в виде

$$I = R\varepsilon \left[1 + \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^2 \right] \int_{\operatorname{arccn} 1/\operatorname{ch} \alpha}^{\operatorname{arccn} 0} \operatorname{Sn}^2(u, \dot{R}) du;$$

последнее возможно потому, что в области, где $k = \dot{R} \sim 1$, имеет место вырождение эллиптических функций и I вычисляется элементарно. Интегрируя дважды по частям, для I получаем выражение

$$I = R\varepsilon \left[1 + \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^2 \right] \left[- \frac{\operatorname{Sn} u \operatorname{Cn} u}{dn u} \Big|_{u_0}^{u_1} + u \Big|_{u_0}^{u_1} + (\dot{R}^2 - 1) \int_{u_0}^{u_1} \operatorname{Sn}^4 u du \right].$$

Вклад в интеграл возникает от верхнего расходящегося предела

$$\lim_{k \rightarrow 1} \operatorname{arc} \operatorname{Cn} 0 \sim \frac{\pi}{2\sqrt{1-\dot{R}^2}} \rightarrow \infty.$$

Пользуясь вырождением эллиптических функций при $k \rightarrow 1$, закон сохранения энергии в области $\dot{R} \sim 1$ запишем в виде

$$R\varepsilon \left[1 + \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^2 \right] \left\{ \frac{\pi}{2\sqrt{1-\dot{R}^2}} + \frac{R/\varepsilon}{\sqrt{1+(R/\varepsilon)^2}} - \operatorname{arc} \operatorname{sh} R/\varepsilon + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \sqrt{1-\dot{R}^2} \right\} = R_0^2,$$

откуда видим, что при $\dot{R} \rightarrow 1$, $R \rightarrow 0$ имеет место

$$\frac{\pi}{2} \frac{R\varepsilon}{\sqrt{1-\dot{R}^2}} \left[1 + \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^2 \right] = R_0^2.$$

И наконец, в области $R/\varepsilon \ll 1$ (вблизи отрезка и вдали от его краев) движение будет обладать цилиндрической симметрией:

$$\frac{\pi}{2} \frac{R\varepsilon}{\sqrt{1-\dot{R}^2}} = R_0^2.$$

При этом легко показать, что если в начальный момент (центрально-симметричный случай) поверхностная плотность энергии была ρ , то в момент схлопывания (случай цилиндрической симметрии) она увеличивается и становится равной $\pi\rho/2$.

В заключение выражаю глубокую благодарность С. Г. Матиняну за обсуждение работы*.

Ереванский физический институт

Поступила 9.VII.1976

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Scherk. Rev. Mod. Phys., 47, 163 (1975).
2. И. Ю. Кобзарев. Третья школа физики ИТЭФ, 1975, вып. I.
3. М. С. Маринов. Третья школа физики ИТЭФ, 1975, вып. I.
4. Я. Б. Зельдович, И. Ю. Кобзарев, Л. Б. Окунь. ЖЭТФ, 67, 3 (1974).

* Когда настоящая работа была завершена, нами был получен препринт (Р. А. Collins, R. W. Tucker. DL/P 258, 1976) на аналогичную тему. Основные различия с проделанной нами работой заключаются в следующем:

- 1) использован другой способ вывода функции Лагранжа;
- 2) в связи с вырожденностью системы основное внимание в указанной работе уделено построению гамильтонова формализма с помощью теории связей Дирака; исходя из аналогии с механикой релятивистской частицы, эта задача нами решена иным путем.

ՌԵԼԱՏԻՎԻՍՏԻԿ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ԿԼԱՍԻԿ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Լ. Ն. ԿՈՎԱԼ

Նշենելով ռելյատիվիստիկ մասնիկների կլասիկ մեխանիկայի և ռելյատիվիստիկ լարի տեսության անալոգիայից դուրս են բերված հավասարումները ռելյատիվիստիկ մակերևույթների համար: Ցույց է տրված, որ ռելյատիվիստիկ մակերևույթները օժտված են հանգստի զանգվածով և առաձգական հատկություններով: Տեսությունը մեկնաբանվում է սֆերիկ և էլիպսոիդալ մեմբրանների օրինակներով:

CLASSICAL THEORY OF RELATIVISTIC SURFACES

L. N. KOVAL

The equations of relativistic surface motion are derived by analogy with the classical mechanics of relativistic particle and the theory of relativistic strings. It is shown that relativistic surfaces represent a medium having elastic² properties and rest mass. The theory is illustrated by the examples of spherical and ellipsoidal membranes. In the spherical membrane case the existence of wave-corpuscle duality is pointed out.