Изв. АН Армянской ССР, Физика, 12, 357—362 (1977)

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Д. М. СЕДРАКЯН, К. В. ПАПОЯН

Рассматривается задача о влиянии неравновесного газа фононов на высокочастотную звуковую волну в диэлектрической среде в приближении, когда плотность среды считается постоянной. Найдены уравнения продольного и поперечного звуковых волн, вычислены перенормировка скорости и коэффициент поглощения.

1. Хорошо известно, что в чистых образцах твердых тел длина свободного пробега фононных возбуждений при понижении температуры растет и может превосходить длину волны распространяющегося в нем звука. Такая ситуация может осуществляться вблизи абсолютного нуля, и поэтому будет выполнено условие

$$\omega\tau \gg 1, \tag{1}$$

где ω — частота внешнего звука, τ — характерное время столкновений фононов. Например, в твердом He II неравенство (1) будет иметь место для температур, значительно меньших той температуры, которая является нижним краем интервала, где распространяется второй звук.

Задача о распространении звука в твердом теле, когда условие (1) выполнено, рассматривалась во многих работах (см., напр., [1—8]), в которых основное внимание уделялось нахождению температурной и частотной зависимостей коэффициента поглощения. При этом использовались как квантовомеханическая теория возмущений [1—4], так и метод кинетического уравнения [5—8].

В настоящей работе с помощью метода кинетического уравнения рассматривается задача распространения высокочастотного звука в изотропной диэлектрической среде в приближении, когда плотность среды считается постоянной. Вычислены поправки к упругим модулям, обусловленные взаимодействием звуковых волн с тепловыми фононами, а также найдены формулы, определяющие температурную и частотную зависимости коэффициента поглощения и величины перенормировок скоростей продольного и поперечного звуковых волн.

Следует отметить, что при рассмотрении явления поглощения звука помимо условия (1) необходимо, чтобы выполнялось также неравенство

$$\hbar\omega \gg \Delta E,$$

где ΔE — неопределенность в энергии теплового фонона, обусловленная столкновениями. Мы будем предполагать, что оба эти условия выполнены.

2. Если через $N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ обозначить неравновесную функцию распределения фононов, то кинетическое уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + [NH] = J(N), \tag{2}$$

где $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ — гамильтониан фонона, а $J(N)$ — интеграл столкновений. Вид гамильтониана можно установить с помощью преобразования Галилея аналогично случаю сверхтекучего гелия [9]:

$$H = \varepsilon_\alpha(p) + \left(\mathbf{p}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right), \tag{3}$$

где $\varepsilon_\alpha(p)$ — энергия фонона с поляризацией α и квазиимпульсом p в системе отсчета, движущейся со скоростью $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ относительно неподвижной системы, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — вектор смещения среды.

С помощью выражения (3) кинетическое уравнение (2) можно привести к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{f}{\tau} = \mathbf{v}_\alpha \left(\frac{\partial N_0}{\partial \varepsilon_\alpha}\right)(\mathbf{p}\nabla)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \tag{4}$$

где $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \equiv N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - N_0(p)$, а для $J(N)$ использовано приближение времени релаксации, $\mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \mathbf{p}}$ — групповая скорость фонона, $N_0(p)$ — равновесная функция Планка.

Обозначим через ρ плотность среды. Тогда для импульса единицы объема вещества будем иметь выражение $\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \sum_\alpha \int N\mathbf{p}d\mathbf{p}$, в котором второй член есть суммарный импульс фононов. Уравнение движения среды теперь можно записать в стандартной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_\alpha \int N p_i d\mathbf{p}\right\} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{5}$$

где σ_{ik} — тензор упругих напряжений, вид которого при $T \neq 0$ неизвестен, но при $T = 0$ должен совпадать с обычным выражением

$$\sigma_{ik}(T=0) = 2\mu u_{ik} + \lambda u_{ll}\delta_{ik}, \tag{6}$$

μ и λ — коэффициенты Ляме, а u_{ik} — тензор деформаций.

Воспользовавшись тождеством [9]

$$\frac{\partial}{\partial t}\int N p_i d\mathbf{p} + \frac{\partial}{\partial x_k}\int N p_i \frac{\partial H}{\partial p_k} d\mathbf{p} + \int N \frac{\partial H}{\partial x_i} d\mathbf{p} = 0,$$

уравнение (5) можно переписать в следующем виде (суммирование по α опущено):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\sigma_{ik} - \int N p_i \frac{\partial H}{\partial p_k} d\mathbf{p}\right\} + \int N \frac{\partial H}{\partial x_i} d\mathbf{p} = 0. \tag{7}$$

Представляя вектор квазиимпульса в виде

$$p_i = (\mathbf{n}\mathbf{p})n_i + (\mathbf{n} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{n}))_i$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления распространения волны) и линеаризуя уравнение (7) с учетом постоянства ρ, получаем

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \sigma_{ik} + \int f \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial p_k} (\mathbf{n} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{n}))_i \, d\mathbf{p} \right\} = 0. \qquad (8)$$

Из этого уравнения мы определим тензор σ_{ik} отдельно для продольных и поперечных волн.

В случае продольной волны применяя к (8) операцию rot, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \sigma_{ik} + \int f \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial p_k} (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}))_i \, d\mathbf{p} \right\} = \delta_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \qquad (9)$$

где Φ — скалярная функция, которую определяем с помощью выражения (6) при абсолютном нуле: $\Phi = (\lambda + 2\mu) u_{ll} \delta_{ik}$. Интегрируя выражение (9), для σ_{ik} получаем

$$\sigma_{ik} = (\lambda + 2\mu) u_{ll} \delta_{ik} - \sum_\alpha \int f \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial p_k} (\mathbf{n} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{n}))_i \, d\mathbf{p}.$$

Подстановка этого тензора в (8) дает следующее уравнение для продольной звуковой волны:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c_l^2 \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\mathbf{n}}{\rho} \sum_\alpha \int \left(\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right) (\mathbf{np}) \, d\mathbf{p} = 0, \qquad (10)$$

где $c_l = \frac{\sqrt{\lambda + 2\mu}}{\rho}$ — скорость продольного звука при $T = 0$.

В случае поперечной волны, применяя к уравнению (8) операцию div и поступая аналогично предыдущему случаю, находим тензор

$$\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik} - \sum_\alpha (\mathbf{np}) f \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial p_k} n_i d\mathbf{p},$$

с помощью которого из (8) получаем уравнение для поперечного звука:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c_t^2 \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \sum_\alpha \int \left(\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right) (\mathbf{n} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{n})) \, d\mathbf{p} = 0, \qquad (11)$$

где $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость поперечного звука. Последние члены в уравнениях (10) и (11) обусловлены взаимодействием внешнего звука с газом тепловых фононов.

3. Совместное решение уравнений (10), (11) и кинетического уравнения (4) для функций вида $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$ приводит к двум дисперсионным уравнениям, из которых можно определить коэффициент поглощения β_α (мнимая часть $\mathbf{k}$) и величину перенормировки скорости звука $\delta c_\alpha = \omega/k - c_\alpha$. При этом необходимо знать вид функции $\varepsilon_\alpha(p)$. Следуя [2], мы воспользуемся выражением

$$\varepsilon_\alpha(p) = \frac{2\varkappa}{\pi} c_\alpha \hbar \sin \frac{\pi p}{2\varkappa\hbar},$$

которое при малых импульсах принимает вид

$$\varepsilon_\alpha(p) = c_\alpha p\,(1 - \gamma p^2), \tag{12}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\varkappa\hbar}\right)^2 \sim 10^{-37}\ г^{-2}\ см^{-2}\ сек^2.$$

Таким образом, для продольного звука имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 - k^2 c_l^2 - \frac{1}{\rho}\Lambda_l = 0,$$

откуда

$$\beta_l = -\frac{1}{2\rho c_l^2 k}\,\mathrm{Im}\,\Lambda_l, \tag{13}$$

$$\delta c_l = \frac{1}{2\rho c_l^2 k^2}\,\mathrm{Re}\,\Lambda_l, \tag{14}$$

где

$$\Lambda_l = i\Gamma k^2 \int\limits_0^\infty \frac{2\pi p^4 dp}{(2\pi\hbar)^3}\left\{v_l^2\left(\frac{\partial N_0}{\partial\varepsilon_l}\right) J_l(s_l) + 2v_t^2\left(\frac{\partial N_0}{\partial\varepsilon_t}\right) J_l(s_t)\right\},$$

$$J_l(x) \sim \frac{(1-i\Gamma)^4}{(i\Gamma x)^5}\left\{\ln\frac{1+\Gamma^2(1-x)^2}{1+\Gamma^2(1+x)^2} + i\left[\mathrm{arctg}\,\Gamma\,(1+x) - \mathrm{arctg}\,\Gamma\,(1-x)\right]\right\}$$

$$\Gamma = \omega\tau, \quad s_\alpha = \frac{kv_\alpha}{\omega}.$$

При $\Gamma \gg 1$ с помощью (12) получаем

$$\beta_l = \frac{\pi^3\omega}{30\rho\hbar^3 c_l^2}\left(\frac{kT}{c_l}\right)^4, \tag{15}$$

$$\delta c_l = \frac{\pi^2}{30\rho\hbar^3}\left(\frac{kT}{c_l}\right)^4 \ln\frac{2c_l^2}{27\gamma(kT)^2}. \tag{16}$$

В случае поперечного звука дисперсионное уравнение есть

$$\omega^2 - c_t^2 k^2 - \frac{1}{2\rho}\Lambda_t = 0,$$

из которого для β_t и δc_t получаем

$$\beta_t = -\frac{1}{4\rho c_t^2 k}\,\mathrm{Im}\,\Lambda_t, \tag{17}$$

$$\delta c_t = \frac{1}{4\rho c_t^2 k^2}\,\mathrm{Re}\,\Lambda_t, \tag{18}$$

где

$$\Lambda_t = k^2 \int\limits_0^\infty \frac{2\pi p^4 dp}{(2\pi\hbar)^3}\left\{v_l^2\left(\frac{\partial N_0}{\partial\varepsilon_l}\right) J_t(s_l) + 2v_t^2\left(\frac{\partial N_0}{\partial\varepsilon_t}\right) J_t(s_t)\right\},$$

$$J_t(x) \sim \frac{i}{x}\left[1+\frac{(1-i\Gamma)^2}{\Gamma^2x^2}\right]\left(\frac{1-i\Gamma}{\Gamma x}\right)\left\{\ln\frac{1+\Gamma^2(1-x)^2}{1+\Gamma^2(1+x)^2}+\right.$$

$$\left.+\,i\left[\operatorname{arctg}\Gamma(1+x)-\operatorname{arctg}\Gamma(1-x)\right]\right\}.$$

При $\Gamma \gg 1$ из (17) и (18) получаем

$$\beta_t=\frac{\pi^3\omega}{60\rho\hbar^3c_t^2}\left(\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)\left(1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)\left(\frac{kT}{c_t}\right)^4, \tag{19}$$

$$\delta c_t\approx\frac{\pi^2c_t}{60\rho\hbar^3c_l^2}\left(\frac{kT}{c_t}\right)^4\left(1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)\ln\frac{c_l+c_t}{c_l-c_t}. \tag{20}$$

Как в формулах (15), (16), так и в (19), (20) сохранены относительно большие члены. Оценки на основе полученных формул в случае твердого He^4 дают

$$\beta_l\approx 64\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)T^4,$$

$$\delta c_l\approx 0{,}4\ T^4\ln\frac{3{,}7\cdot 10^3}{T^2};$$

$$\beta_t\approx 4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)T^4,$$

$$\delta c_t\approx 10^{-8}\ T^4,$$

где числовые значения для скорости звука взяты из [10] и относятся к температуре порядка 1,2 К°, ω_0 — дебаевская частота, которая при давлении порядка 150 *тор* равна приблизительно $4\cdot 10^{12}$ *сек*$^{-1}$ [11]. Следует отметить крайнюю малость δc_t, которая указывает на то, что скорость поперечного звука в рассматриваемых условиях практически не зависит от температуры.

Ереванский государственный университет
Кироваканский педагогический институт

Поступила 10.XI.1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. D. Landau, G. Rumer.* Zs. USSR, 11, 18 (1937) (см. Л. Д. Ландау. Собрание трудов, 1969, т. 1, стр. 227).
2. *H. J. Maris.* Phys. Lett., 17, 228 (1965).
3. *П. С. Зирянов, Г. Г. Талуц.* ЖЭТФ, 54, 855 (1968).
4. *Ю. А. Синицын, В. М. Канторович, В. М. Цукерник.* ФТТ, 15, 3573 (1973).
5. *S. Simons.* Proc. Phys. Soc., 20, 10 (1966).
6. *T. Ehrenreich, H. Woodruff.* Phys. Rev., 123, 1955 (1966).
7. *R. Gayer.* Phys. Rev., 148, 789 (1966).
8. *Ю. А. Логачев, Б. Я. Мойжес.* ФТТ, 15, 2888 (1973).
9. *И. М. Халатников.* ЖЭТФ, 22, 687 (1952) (см. И. М. Халатников. Теория сверхтекучести, М., 1972).
10. *Р. Гюйе.* Квантовые кристаллы, Изд. Мир, М., 1975.
11. *Л. Межов-Деглин.* ЖЭТФ, 49, 66 (1965).

ՑԱԾՐ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐՈՒՄ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՁԱՅՆԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Կ. Վ. ՊԱՊՈՅԱՆ

Դիտարկվում է ոչ հավասարակշռված ֆոնոնային գազի ազդեցության խնդիրը բարձր հաճախության ձայնային ալիքի վրա, երբ միջավայրի խտությունը հաստատուն է։ Գտնված են երկայնական և լայնական ձայնային ալիքների հավասարումները, հաշված են ձայնի արագության փոփոխությունը և կլանման գործակիցը։

ON THE SOUND PROPAGATION IN INSULATING MEDIUM AT LOW TEMPERATURES

D. M. SEDRAKYAN, K. V. PAPOYAN

The problem of the influence of non-equilibrium phonon gas on high frequency sound wave in a dielectric medium is considered in the constant density approximation. The longitudinal and transversal sound wave equations are obtained, the sound velocity change and the absorption coefficient are calculated.