Изв. АН Армянской ССР, Физика, 12, 347—351 (1977)

# РАССЕЯНИЕ ЭКСИТОНА ВАННЬЕ-МОТТА НА ФОНОНАХ В ТОНКИХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРОВОЛОКАХ

А. А. КИРАКОСЯН, Х. ЛАНТОВ

Вычислено время релаксации экситона Ваннье-Мотта, обусловленной рассеянием на акустических фононах в тонких квантующих полупроводниковых проволоках с прямоугольным и круглым сечениями. Получены зависимости времени релаксации от температуры, поперечных размеров проволоки и значения отношения эффективных масс электрона и дырки.

В настоящей работе исследуется процесс рассеяния экситонов Ваннье-Мотта (экситоны большого радиуса) в квантующих полупроводниковых проволоках на акустических фононах. Аналогичная задача в случае массивных образцов была рассмотрена в [1—3], а в тонких квантованных полупроводниковых пленках — в [4].

## 1. Общие формулы

Рассмотрим тонкую проволоку и направим ось $z$ координатной системы вдоль оси проволоки. Как обычно, будем считать, что в поперечном направлении электрон (дырка) находится в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. В предположении, что поперечные размеры проволоки меньше радиуса связанного экситонного состояния в массивном образце ($d < a_0$), волновую функцию и спектр энергии экситона, находящегося в основном состоянии, можно представить в следующем виде:

а) для проволоки прямоугольного сечения $2a \times 2b$

$$\psi_{ex} = \left(\frac{2}{La_0}\right)^{1/2} e^{ikR} e^{-\frac{\rho}{a_0}} \frac{1}{ab} \cos\frac{\pi x_1}{2a} \cos\frac{\pi y_1}{2b} \cos\frac{\pi x_2}{2a} \cos\frac{\pi y_2}{2b}, \tag{1}$$

$$E_{ex} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8\mu}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{\hbar^2k^2}{2\mu_{ex}} - \frac{\mu e^4}{2\varkappa^2\hbar^2} \equiv \varepsilon_0 + \varepsilon - \Delta E; \tag{2}$$

б) для проволоки круглого сечения радиуса $R_0$

$$\psi_{ex} = \left(\frac{2}{La_0}\right)^{1/2} e^{ikR} e^{-\frac{\rho}{a_0}} \frac{1}{\pi R_0^2 \beta^2} J_0\left(\frac{\alpha r_1}{R_0}\right) J_0\left(\frac{\alpha r_2}{R_0}\right), \tag{3}$$

$$E_{ex} = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2\mu R_0^2} + \frac{\hbar^2k^2}{2\mu_{ex}} - \frac{\mu e^4}{2\varkappa^2\hbar^2} \equiv \varepsilon_0' + \varepsilon - \Delta E. \tag{4}$$

В формулах (1) — (4) использованы обозначения:

$$R = \frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \rho = |z_1 - z_2|, \tag{5}$$

$$\mu_{ex} = \mu_1 + \mu_2, \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}, \tag{6}$$

$a_0 = \varkappa\hbar^2/\mu e^2$ — радиус связанного экситонного состояния в массивном образце, $\hbar k$ — импульс экситона по оси $z$,

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu_{ex}} \tag{7}$$

есть энергия поступательного движения,

$$\Delta E = \frac{\mu e^4}{2\varkappa^2\hbar^2} \tag{8}$$

есть энергия связи экситона, $\varepsilon_0$, $\varepsilon_0'$ — энергии, связанные с квантованием движения электрона и дырки в поперечном направлении, $L$ — длина проволоки, $\alpha \simeq 2{,}4048$ — первый корень нулевой бесселевой функции $J_0(x)$, $\beta = J_1(\alpha) \simeq 0{,}5191$. Индексы 1 и 2 обозначают соответственно электрон и дырку.

Рассмотрим процесс упругого столкновения экситона с фононом, не сопровождающийся внутренним возбуждением или диссоциацией экситона. Законы сохранения будут иметь следующий вид [2, 3]:

$$k \pm q_z = k', \tag{9}$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu_{ex}} \pm \hbar v_0 q_z = \frac{\hbar^2 k'^2}{2\mu_{ex}} + \frac{3}{4}\Delta E \tag{10}$$

для акустических фононов,

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu_{ex}} \pm \hbar\omega_0 = \frac{\hbar^2 k'^2}{2\mu_{ex}} + \frac{3}{4}\Delta E \tag{11}$$

для оптических фононов, где верхний знак соответствует поглощению, а нижний — испусканию фонона, $v_0$ — скорость звука, $\omega_0$ — частота оптического фонона.

С помощью (9) — (11) можно получить ограничение на максимальную температуру $T_0$, ниже которой не происходит изменения внутреннего состояния экситона. В случае рассеяния на акустическом фононе получаем

$$T_0 \lesssim \frac{3\mu e^4}{4\varkappa^2\hbar^2}, \tag{12}$$

а в случае оптического фонона имеем

$$T_0 \lesssim 2\left(\frac{3}{4}\Delta E - \hbar\omega_0\right). \tag{13}$$

Волновую функцию проволоки можно записать в виде

$$\psi(k, N_{\mathbf{q}}) = \psi_{ex} \prod_{\mathbf{q}} \psi_{N_{\mathbf{q}}}(a_{\mathbf{q}}), \tag{14}$$

где $\psi_{N_{\mathbf{q}}}(a_{\mathbf{q}})$ — осцилляторные волновые функции нормальных колебаний кристалла. Матричный элемент перехода, соответствующий процессу взаимодействия экситона с фононом, дается интегралом

$$M_{kk'} = \int \psi^* (k', N'_q)\, \hat{U} \psi (k, N_q)\, d\tau, \tag{15}$$

где $\hat{U}$ — оператор, описывающий взаимодействие экситона с фононом. Вероятность переходов, связанных с поглощением или испусканием фононов, выражается через $M_{kk'}$ известным соотношением

$$W^{\nu}_{kk'} = \frac{2\pi}{\hbar} |M^{\nu}_{kk'}|^2 \delta (\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k - \nu\hbar\omega), \tag{16}$$

где $\nu = +1$ соответствует поглощению, а $\nu = -1$ — испусканию фонона. Время релаксации $\tau$ экситона вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\tau} = - \sum_{q} \frac{\Delta k(q)}{k} [W^{+}_{kk'} + W^{-}_{kk'}]. \tag{17}$$

## 2. Рассеяние на акустических фононах

Энергию взаимодействия экситона с акустическим фононом согласно [2] можно представить в следующем виде:

$$u_s = C_1 \Delta (r_1) - C_2 \Delta (r_2), \tag{18}$$

где $C_1$ и $C_2$ — постоянные, равные по порядку величины нескольким *эв*, $\Delta (r) = \operatorname{div} \mathbf{u}$ — относительное изменение объема в точке $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ — смещение данной точки. Смещение $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ описывается упругой гармонической волной, которую можно записать в виде

$$U_s = \frac{i}{N^{1/2}} q a_q \left\{ e^{i q_z R} \left[ C_1 e^{i (q_x x_1 + q_y y_1)} e^{i \frac{\mu_2 q_z}{\mu_{ex}} \rho} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - C_2 e^{i (q_x x_2 + q_y y_2)} e^{i \frac{\mu_1 q_z}{\mu_{ex}} \rho} \right] \right\} + \textit{компл. сопр.}, \tag{19}$$

где $N$ — число атомов в основной области кристалла. В (19) учтено то обстоятельство, что экситон взаимодействует только с продольными фононами.

С помощью (14) и (19) для матричного элемента (в случае проволоки прямоугольного сечения) получаем следующее выражение:

$$M^{\nu}_{kk'} = \frac{iq}{N^{1/2}} \left[ \frac{\hbar}{2M\omega_q} (N_q + \delta_\nu) \right]^{1/2} M_0 \delta (k' - k - \nu q_z), \tag{20}$$

$$M_0 = \frac{\sin q_x a}{q_x a} \, \frac{\sin q_y b}{q_y b} \, \frac{\pi^4}{(\pi^2 - a^2 q_x^2)(\pi^2 - b^2 q_y^2)} \left\{ \frac{C_1}{(1 + \beta_1 q_z^2)^{1/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{C_2}{(1 + \beta_2 q_z^2)^{1/2}} \right\}, \tag{21}$$

где

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{4} \left( \frac{\mu_{2,1}}{\mu_{ex}} a_0 \right)^2, \quad \delta_\nu = \frac{1}{2} (1 - \nu) = 0,\ 1, \tag{22}$$

$\omega_q = v_0 q$ — частота акустического фонона, $M$ — масса атома кристалла, $N_q$ — квантовое число осциллятора с частотой $\omega_q$. В дальнейшем будем считать, что фононный спектр не квантован.

При вычислении вероятности рассеяния согласно (16) учтем тот факт, что при тепловом равновесии число фононов $\overline{N}_q$ дается формулой Планка. Легко убедиться, что для фононов, взаимодействующих в основном с экситонами,

$$\hbar v_0 q \sim \hbar v_0 k \ll T,$$

так что в качестве равновесного числа фононов можно взять приближенное выражение

$$\overline{N}_q \simeq \frac{T}{\hbar v_0 q}, \tag{23}$$

а в балансе энергии пренебречь энергией фонона.

После несложных вычислений для времени релаксации экситонов получим следующее выражение:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{9\, T \mu_{ex} (C_1 - C_2)^2}{8 \rho_0 a b v_0^2 \hbar^3 k} f(s,\ k,\ \mu_1,\ \mu_2), \tag{24}$$

где

$$f(s,\ k,\ \mu_1,\ \mu_2) = \left[\frac{s}{(1 + 4\beta_1 k^2)^{1/2}} + \frac{1-s}{(1 + 4\beta_2 k^2)^{1/2}}\right]^2, \tag{25}$$

$$s = \frac{C_1}{C_1 - C_2}. \tag{26}$$

Аналогичные вычисления для проволоки с круглым сечением приводят к следующему результату:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\, T (C_1 - C_2)^2 \mu_{ex}}{\pi \rho_0 R_0^2 v_0^2 \hbar^3 k} \left(\frac{\xi}{\beta}\right)^4 f(s,\ k,\ \mu_1,\ \mu_2), \tag{27}$$

где $\xi = 0{,}688$. При значениях импульса экситона, соответствующих тепловому равновесию, $\tilde{p} \simeq (\mu_{ex} T)^{1/2}$, функцию $f(s,\ \tilde{k},\ \mu_1,\ \mu_2)$ можно записать в виде

$$f(s,\ \tilde{k},\ \mu_1,\ \mu_2) \simeq \left\{\frac{s}{\left[1 + \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\frac{T}{T_0}\right]^{1/2}} + \frac{1-s}{\left[1 + \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{T}{T_0}\right]^{1/2}}\right\}^2, \tag{28}$$

где $T_0$ определяется выражением (12). Из (28) следует, что при $\mu_1 \sim \mu_2$ для всех $k \lesssim \tilde{k}$ $f(s,\ k,\ \mu_1,\ \mu_2) \simeq 1$. Если же $\mu_2 \gg \mu_1$ или $\mu_2 \ll \mu_1$, то $f(s,\ k,\ \mu_1,\ \mu_2)$ определяется соответственно первым или вторым слагаемым в (28). Существенно, однако, что даже в этих случаях функция $f(s,\ k,\ \mu_1,\ \mu_2)$ очень слабо зависит от $k$. При этом, как нетрудно заметить, выражение (24) при замене $C_1 - C_2$ на $C_1$ $(C_2)$ и $\mu_{ex}$ на $\mu_1$ $(\mu_2)$ переходит в соответствующее выражение для времени релаксации электрона (дырки) в проволоке с прямоугольным сечением [5].

Таким образом, зависимость времени релаксации $\tau$ от волнового числа экситона $k$ носит в основном линейный характер. Заметим, что в квантованной пленке $\tau$ не зависит от $k$ [4], а в массивном образце $\tau^{-1} \sim k$ с безразмерными множителями, зависящими от энергии экситона [2]. Численные оценки времени релаксации экситона на акустическом фононе для проволоки прямоугольного сечения из германия (в предположении, что характеристики проволоки совпадают с соответствующими характеристиками массивных образцов) дают: при $T=10^\circ K$ получаем $\tau \simeq 10^{-10}$ *сек*, а при $T=40^\circ K$ имеем $\tau \simeq 4 \cdot 10^{-11}$ *сек*. Таким временам релаксации соответствуют длины свободного пробега, равные по порядку величины $l \simeq 10^{-4}$ *см*, что примерно на два порядка превышает поперечные размеры проволоки.

Ереванский государственный
университет

Поступила 5.VII.1976

## ЛИТЕРАТУРА

1. *P. Leurgans, J. Bardeen.* Phys. Rev., 87, 200 (1952).
2. *А. И. Ансельм, Ю. А. Фирсов.* ЖЭТФ, 28, 151 (1955).
3. *А. И. Ансельм, Ю. А. Фирсов.* ЖЭТФ, 30, 719 (1956).
4. *Э. М. Казарян, Г. Л. Маилян, Р. Л. Энфиаджян.* Изв. АН АрмССР, Физика, 8, 47 (1973).
5. *А. М. Казарян.* Изв. АН АрмССР, Физика, 10, 368 (1975).

## ՎԱՆՅԵ-ՄՈՏԻ ԷՔՍԻՏՈՆԻ ՑՐՈՒՄԸ ՖՈՆՈՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ԲԱՐԱԿ ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴՉԱՅԻՆ ԼԱՐԵՐՈՒՄ

Ա. Ա. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ, Հ. ԼԱՆՏՈՎ

*Աշխատանքում հաշվված է Վանյե-Մոտի էքսիտոնի ռելակսացիայի ժամանակը՝ պայմանավորված ձայնային ֆոնոնների վրա ցրումով բարակ (քվանտացված) ուղղանկյուն և կլոր կտրվածքով կիսահաղորդչային լարերում։ Ստացված է ռելակսացիայի ժամանակի կախումը ջերմաստիճանից, լարի լայնական չափերից, էլեկտրոնի և խոռոչի էֆեկտիվ զանգվածների հարաբերությունից։*

## WANNIER-MOTT EXCITON SCATTERING BY PHONONS IN THIN SEMICONDUCTOR WIRES

A. A. KIRAKOSYAN, H. LANTOW

The relaxation time of Wannier-Mott exciton due to scattering by acoustical phonons in a thin quantized semiconductor wire with rectangular and circular cross sections has been calculated. The relaxation time dependence on the temperature, cross-sectonal dimensions of the wire and the ratio of electron to hole effective masses is obtained.