Изв. АН Армянской ССР, Физика, 12, 186—190 (1977)

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО СПИРАЛИ ВНУТРИ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

Г. Г. КАРАПЕТЯН

Рассмотрено излучение заряда, движущегося по спиральной траектории внутри круглого идеально проводящего волновода. Вычислена излученная энергия и показано, что в дипольном приближении она может заметно превосходить энергию при отсутствии волновода.

Вопрос об излучении заряда, движущегося по спирали или окружности, довольно подробно изучен и имеет большое практическое применение (см., напр., [1]). Для выяснения влияния проводящих поверхностей на энергию излучения в [2] рассматривалось излучение заряда, движущегося по окружности внутри круглого идеально проводящего волновода, и было показано, что при определенных частотах вращения интенсивность излучения может неограниченно возрастать. Такая расходимость обусловлена предположением о бесконечно долгом движении заряда, поэтому представляет интерес исследовать реальный случай, когда заряд движется в течение конечного интервала времени.

Пусть покоящийся точечный заряд e в момент времени $t=-T/2$ внезапно начинает двигаться с постоянной скоростью $c\beta$ по спиральной траектории внутри круглого идеально проводящего волновода радиуса a и, совершив N полных оборотов, также внезапно останавливается в момент $t=T/2$. Введя цилиндрическую систему координат с осью z, направленной по оси волновода (и спирали), траекторию заряда можно записать в виде

$$\mathbf{r}(t)=\begin{cases}\mathbf{r}_0 R+\boldsymbol{\varphi}_0\Omega\,(t+T/2)+\mathbf{z}_0 vt, & |t|\leqslant T/2,\\ \mathbf{r}_0 R+\boldsymbol{\varphi}_0\, 2\pi-\mathbf{z}_0 vt/2, & t<-T/2,\\ \mathbf{r}_0 R+\boldsymbol{\varphi}_0\, 2\pi+\mathbf{z}_0 vt/2, & t>T/2.\end{cases} \tag{1}$$

Здесь R — радиус спирали, Ω — угловая скорость, $v\equiv c\beta_\parallel$ — поступательная скорость заряда, $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_0$, $\mathbf{z}_0$ — орты системы координат.

Потери энергии на излучение определяются работой сил, действующих на заряд со стороны излученного поля,

$$dW=-\mathbf{F}d\mathbf{r}=-e\overline{\mathbf{E}}d\mathbf{r}=-e(c\beta_\parallel\overline{E}_z+\Omega R\overline{E}_\varphi)\;dt, \tag{2}$$

где черта сверху означает, что берется значение поля в точке нахождения заряда.

Вычисление полей проводится методом разложения по собственным векторным функциям волновода, разработанным в [3]. Опуская промежуточные преобразования, приведем окончательный результат:

$$\widetilde{E}_z = 0, \quad \widetilde{E}_\varphi = \widetilde{E}_\varphi^E + \widetilde{E}_\varphi^H,$$

$$\widetilde{E}_\varphi^E = -i\,\frac{2\pi ec}{R}\sum_{\substack{s=-\infty\\ p=1}}^{\infty}\frac{sJ_s^2(\varkappa_1 R)}{M_1^2}\,e^{is\Omega(t+T/2)}\left(\widetilde{P} - \frac{is\Omega}{c^2\varkappa_1^2}\,\widetilde{\widetilde{P}}\right),$$

$$\widetilde{E}_\varphi^H = -\frac{2\pi e\Omega R}{c}\sum_{\substack{s=-\infty\\ p=1}}^{\infty}\frac{J_s'^2(\varkappa_2 R)}{M_2^2}\,e^{is\Omega(t+T/2)}\,\widetilde{\widetilde{P}}, \tag{3}$$

$$\widetilde{P} = e^{-is\Omega(t+T/2)}\int\limits_0^{t+T/2} J_0\left(c\varkappa\sqrt{1-\beta_\parallel^2}\,x\right)e^{is\Omega x}\,dx,$$

$$\widetilde{\widetilde{P}} = \frac{J_0[c\varkappa\sqrt{1-\beta_\parallel^2}\,(t+T/2)] - is\Omega\,\widetilde{P}}{1-\beta_\parallel^2}.$$

Здесь J_s — функция Бесселя, $\varkappa_1 = \frac{\nu_1}{a}$, $\varkappa_2 = \frac{\nu_2}{a}$, ν_1 и ν_2 — p-ые корни соответственно функций $J_s(z)$ и $J_s'(z) = \frac{d}{dz}J_s(z)$; $M_1 = \sqrt{\pi}\,a J_s'(\nu_1)$, $M_2 = \sqrt{\pi}\,a\left(1-\frac{s^2}{\nu_2^2}\right)^{1/2} J_s(\nu_2)$, индексы 1 и 2 соответствуют E- и H-волнам.

Подставляя (3) в (2) и интегрируя dW в промежутке $t = (-T/2, T/2)$, после несложных преобразований приходим к следующему выражению для излученной энергии:

$$W = W^E + W^H,$$

$$W^E = \sum_k s\,\frac{4\pi e^2\,\Omega c J_s^2(\varkappa_1 R)}{\varkappa_1^2 M_1^2(1-\beta_\parallel^2)}\left[\Delta_1^2\,Y_1 + \frac{s\Omega}{c^2}\,Y_2\right], \tag{4}$$

$$W^H = \sum_k\frac{4\pi e^2\,\Omega^2 R^2 J_s'^2(\varkappa_2 R)}{cM_2^2(1-\beta_\parallel^2)}\left[s\Omega\,Y_1 + \frac{1}{1+\delta_{s0}}\,Y_2\right],$$

где

$$Y_1 = \int\limits_0^T (T-\xi)\,J_0[c\varkappa\sqrt{1-\beta_\parallel^2}\,\xi]\sin(s\Omega\xi)\,d\xi, \tag{5}$$

$$Y_2 = \int\limits_0^T J_0[c\varkappa\sqrt{1-\beta_\parallel^2}\,\xi]\cos(s\Omega\xi)\,d\xi,$$

$$\Delta_{1,2} = \sqrt{\frac{s^2\Omega^2}{c^2} - \varkappa_{1,2}^2(1-\beta_\parallel^2)}, \quad \delta_{s0} = \begin{cases}1, & s=0\\ 0, & s\neq 0\end{cases}.$$

Как видно из (4), в выражение энергии входят два различных слагаемых, пропорциональных Y_1 и Y_2. Можно показать [4], что

$$Y_2 \to \text{const}, \quad Y_1 \to T\,\text{const} \quad \text{при} \quad T\to\infty. \tag{6}$$

Отсюда ясно, что искомая энергия излучения заряда, движущегося по спирали, описывается членом Y_1, в то время, как энергия, соответствующая члену Y_2, обусловлена внезапными изменениями скорости заряда в начале и в конце траектории; поэтому она ограничена при $T\to\infty$. Аналогичные слагаемые рассмотрены в [5], где исследовалось черенковское излучение заряда, равномерно движущегося в течение конечного интервала времени.

Оставляя в (5) лишь члены с Y_1 и полагая в интегралах $s\Omega\xi=x$, для энергии излучения заряда, движущегося по спирали внутри круглого волновода, получим

$$W=\sum_{s=1}^{\infty}W_s=\sum_{s=1}^{\infty}(W_s^E+W_s^H),$$

$$W_s^E=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{4e^2c\Delta_1^2J_s^2(s\beta_0\alpha_s^E)\,T}{\nu_E^2(1-\beta_\parallel^2)\,J_s'^2(\nu_E)}F_s^E, \tag{7}$$

$$W_s^H=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{4e^2c\beta_0^2J_s'^2(s\beta_0\alpha_s^H)\,T}{a^2\left(1-\frac{s^2}{\nu_H^2}\right)J_s^2(\nu_H)}F_s^H,$$

где введены обозначения

$$\alpha_s^{E,H}=\frac{\alpha^{E,H}}{s}=\frac{\Omega_{\text{кр}}}{s\Omega}\sqrt{1-\beta_\parallel^2}=\frac{R\nu_{E,H}}{sa\beta_0},\quad \beta_0=\frac{\Omega R}{c\sqrt{1-\beta_\parallel^2}},$$

$$F_s^{E,H}=\int_0^{2\pi sN}\left(1-\frac{x}{2\pi sN}\right)\sin x\,J_0(\alpha_s^{E,H}x)\,dx, \tag{8}$$

$\Omega_{\text{кр}}$ — критическая частота волновода.

Таким образом, полную энергию излучения нам удалось представить в виде суммы энергий волноводных волн, определяемых индексами s и p, причем индекс s определяет одновременно и номер гармоники, так как частота Ω входит в формулы (8) в виде $s\Omega$.

Зависимость энергии от времени излучения T (или числа оборотов N) определяется функцией $F_s^{E,H}$, которая при замене $sN\to N$, $s\alpha_s^{E,H}\to\alpha$ совпадает с функцией F, описывающей энергию ондулятора в прямоугольном волноводе. Поэтому аналогично F имеет место асимптотика

$$F_s^{E,H}=\frac{1}{2\sqrt{|1-(\alpha_s^{E,H})^2|}}\left[1+\operatorname{sgn}(1-\alpha_s^{E,H})+O\left(\frac{1}{\xi_{E,H}}\right)\right],\quad \xi_{E,H}\gg1,$$

$$F_s^{E,H}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{sN}\,[1+O(\xi_{E,H}^2)],\quad \xi_{E,H}\ll1, \tag{9}$$

где

$$\xi_{E,H}\equiv2\sqrt{sN|1-\alpha_s^{E,H}|}.$$

Согласно (9) вклад в энергию излучения членов с $\alpha_s>1$ составляет малую (при $N\to\infty$) долю $\sim O(1/\sqrt{N})$ от вклада членов с $\alpha_s<1$;

следовательно члены с $\alpha_s > 1$ (или $s\Omega < \Omega_{кр}\sqrt{1-\beta_{\parallel}^2}$) обусловлены переходными процессами, связанными с конечностью времени движения заряда, что приводит к немонохроматичности плотностей тока и заряда. Естественно поэтому в выражении полной энергии (7) оставлять лишь члены с $\alpha_s < 1$.

Разделив W на T и устремив $N \to \infty$, из (7) можно получить интенсивность излучения заряда, движущегося по бесконечной спиральной траектории внутри волновода (которая при $\beta_{\parallel} = 0$ совпадает с аналогичной формулой в [2]), откуда путем предельного перехода $a \to \infty$ удается получить интенсивность s-гармоники в свободном пространстве:

$$P_s^0 = s^2 \frac{2\, e^2 c \beta_0^2}{R^2} \int\limits_0^{\pi/2} [\operatorname{ctg}^2 x\, J_s^2(s\,\beta_0 \sin x) + \beta_0^2\, J_s'^2(s\,\beta_0 \sin x)] \sin x\, dx. \tag{10}$$

По виду формула (10) несколько отличается от соответствующей ей формулы (49) работы [6], но по величине они совпадают.

Для характеристики влияния волновода на излучение определим параметр эффективности η как отношение энергий s-гармоники при наличии волновода и его отсутствии

$$\eta = \frac{W_s}{W_s^0} = \frac{W_s^E + W_s^H}{W_s^0}. \tag{11}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением частного случая $\beta_0 \ll 1$, который, очевидно, означает дипольное приближение в сопутствующей заряду системе координат (т. е. в системе координат, где заряд движется по окружности). Используя асимптотику функции Бесселя $J_s(s\beta_0) \simeq (s\beta_0)^s/2^s!$, из (7) и (10) нетрудно показать, что основная энергия излучается на первой гармонике,

$$W_1^0 = \frac{2\, e^2 c \beta_0^4 T}{3\, R^2}, \tag{12}$$

$$W_1^E = \sum_p \frac{e^2 c \beta_0^2\, (\alpha^E)^2\, \Delta_1^2\, T}{(1-\beta_{\parallel}^2)\, \nu_E^2\, J_0^2(\nu_E)}\, F_1^E,$$

$$W_1^H = \sum_p \frac{e^2 c \beta_0^2\, T}{a^2 \left(1 - \frac{1}{\nu_H^2}\right) J_1^2(\nu_H)}\, F_1^H. \tag{13}$$

Радиус волновода выберем таким, чтобы в нем распространялся лишь один, наинизший тип волны, т. е. условие $\alpha < 1$ выполнялось только для одной волны. В нашем случае движения заряда по спирали наинизшим типом является волна H_{11}, поскольку из (8) следует, что при постепенном увеличении a условие $\alpha < 1$ начинает выполняться сначала для H-волны (так как $\nu_H^{\min} \sim 1{,}8 < \nu_E^{\min} \sim 3{,}8$). Таким образом, подставляя (12) и первый член суммы из (13) в (11), получаем

$$\eta = \frac{3(\alpha^H)^2}{2(\nu_H^2 - 1)\, J_1^2(\nu_H)}\, F_1^H. \tag{14}$$

Максимальное значение функции F_1^H при заданном N достигается при $\alpha^H = 1 - 0{,}30/N$ и равно $F_0 = 1{,}12\sqrt{N}$. Подставляя в (14) эти значения, а также найденные из таблиц [7] $\nu_H = 1{,}84$, $J_1(\nu_H) = 0{,}58$, находим максимальную эффективность

$$\eta_{\max} = 2{,}07\sqrt{N}\left[1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right] \simeq 2{,}1\sqrt{N}. \tag{15}$$

Она, как указывалось, достигается при $\alpha^H = 1 - 0{,}30/N$, т. е. при радиусе волновода, равном (см. (8))

$$a = \frac{1{,}84}{\beta_0} R\left(1 + \frac{0{,}30}{N}\right) \simeq \frac{1{,}84}{\beta_0} R. \tag{16}$$

Таким образом, в приближении $\beta_0 \ll 1$ наличие волновода может заметно увеличить излученную энергию.

Ереванский государственный
университет

Поступила 25.VII.1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Синхротронное излучение, Сб. статей под ред. А. А. Соколова, Изд. Наука, М., 1966.
2. *М. Л. Левин.* ЖТФ, 17, 1159 (1947).
3. *Г. В. Кисунько.* ЖТФ, 16, 565 (1946).
4. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
5. *И. Е. Тамм.* Собрание научных трудов, Изд. Наука, М., 1975, том I, стр. 77.
6. *А. А. Соколов, Д. В. Гальцов, М. М. Колесникова.* Изв. вузов, Физика, № 4, 14 (1971).
7. *Э. А. Чистова.* Таблицы функций Бесселя, Изд. АН СССР, М., 1958.

ԿԼՈՐ, ԻԴԵԱԼԱԿԱՆ ՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱԼԻՔԱՏԱՐՈՒՄ ՊՏՈՒՏԱԿԱՁԵՎ ՀԵՏԱԳԾՈՎ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑՔԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

Գ. Գ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Դիտարկված է կլոր իդեալական հաղորդականությունով օժտված ալիքատարում պտուտակաձև հետագծով շարժվող լիցքի ճառագայթումը։ Հաշված է ճառագայթված էներգիան և դիպոլային մոտավորությամբ ցույց է տրված, որ այն կարող է զգալի գերազանցել ալիքատարի բացակայության դեպքում ճառագայթվող էներգիան։

RADIATION FROM A CHARGE MOVING IN A SPIRAL IN A CYLINDRICAL WAVEGUIDE

G. G. KARAPETYAN

Radiation from a charge moving in a spiral in a cylindrical waveguide is considered. The emitted energy is shown to considerably exceed that obtained in the absence of the waveguide.