

## ИЗЛУЧЕНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЗАРЯДА. В СТОПКЕ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ПОГЛОЩЕНИЯ И МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Г. М. ГАРИБЯН, ЯН ШИ

Построена общая теория образования рентгеновского и более жесткого излучения с учетом поглощения и многократного рассеяния в стопке пластин: при пролете через нее ультрарелятивистского заряда. Рассмотрены частные случаи стопки с большими вакуумными отсеками и стопки с относительно толстыми пластинами (приближение ближайших соседей). Рассмотрен вопрос о краевом эффекте и его выделении из полного излучения.

В работе [1] была построена теория образования излучения (в рентгеновской и более жесткой области частот) в непоглощающей пластине ультрарелятивистским зарядом с учетом влияния многократного рассеяния. Было показано, что это влияние приводит к а) появлению тормозного излучения, образованного на всем пути движения заряда в веществе, б) сглаживанию интерференционных осцилляций в частотном спектре краевого эффекта и в) обогащению этого спектра в жесткой части при достаточно больших энергиях заряда, обусловленному тем, что заряд движется по-разному внутри и вне пластины. В дальнейшем в [2] было учтено влияние поглощающей способности вещества пластины на образование излучения.

В настоящей работе построена общая теория образования излучения при пролете ультрарелятивистского заряда через стопку пластин с учетом влияния как многократного рассеяния, так и поглощающей способности вещества пластин. Показано, что если расстояния между пластинами много больше, чем соответствующая зона формирования переходного излучения, то частотный спектр образуемого излучения совпадает с частотным спектром для одной пластины, умноженным на эффективное число пластин в стопке.

Рассмотрен другой предельный случай, когда многократное рассеяние заряда в пластине приводит к тому, что интерференция имеет место только между излучениями, испущенными от соседних друг к другу отсеков и пластин («приближение ближайших соседей»).

В заключение рассмотрен вопрос о краевом эффекте в пластине и стопке пластин. Обсуждаются возможности экспериментального выделения краевого эффекта из полного излучения.

### 1. Вывод основных формул

Пусть ультрарелятивистская заряженная частица со скоростью  $V_0$  движется вдоль оси  $Z$  из  $-\infty$  и в момент времени  $t_0 = 0$  влетает перпендикулярно в стопку из  $N$  пластин. Толщина каждой пластины равна  $a$ , ширина вакуумных отсеков —  $b$ .

В каждой пластине частица претерпевает многократное рассеяние и ее координата и скорость в момент времени  $t'$  равны  $r'_n$  и  $v'_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ).

При этом  $t'$  в  $n$ -ой пластине изменяется в пределах от  $t_{2(n-1)}$  до  $t_{2n-1}$ . Если считать, что абсолютная величина скорости частицы  $v$  остается неизменной, а изменения направления скорости при многократном рассеянии малы, то

$$t_{2(n-1)} = (n-1)(T_a + T_b), \quad t_{2n-1} = nT_a + (n-1)T_b,$$

где

$$T_a = \frac{a}{v}, \quad T_b = \frac{b}{v}.$$

Обозначим координату и скорость частицы при влете и вылете из  $n$ -ой пластины соответственно через  $r_{ns}$ ,  $v_{ns}$  и  $r_n$ ,  $v_n$ . Поскольку в вакуумных отсеках частица движется равномерно и прямолинейно, то  $v_{ns} = v_{n-1}$ ,  $r_{ns} = r_{n-1} + v_{n-1}T_b$ . Кроме того,  $v_{1s} = v_0$  и примем  $r_{1s} = 0$ .

Распределение интенсивности образующегося излучения на далеких расстояниях за стопкой определяется формулой [3]

$$dW(\theta_0, \omega) = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} |A|^2 d\theta_0 d\omega, \quad (1)$$

где  $d\theta_0 = \theta_0 d\theta_0 d\Phi$  — элемент телесного угла в направлении распространения излучения относительно первоначального направления движения частицы.

Величина  $A$  состоит из члена  $A_1$ , обусловленного движением заряда в пластинах, и члена  $A_0$ , связанного с движением заряда в вакуумных отсеках,

$$A = A_1 + A_0, \quad (2)$$

$$A_1 = \sum_{n=1}^N A_{1n}, \quad A_0 = \sum_{n=0}^N A_{0n}, \quad (3)$$

$$A_{1n} = \gamma_{1n} \exp(i\omega t_{2(n-1)}) \int_0^{T_a} [nv'_n] \exp\{i(\omega t' - kr'_n)\} dt', \quad (4)$$

$$A_{0n} = -\frac{2i[nv_0] \gamma_{0n}}{\omega(\gamma^{-2} + \theta_0^2)}, \quad (5)$$

$$A_{0n} = \gamma_{0n} \exp(i\omega t_{2n-1}) \int_0^{T_b} [nv_n] \exp\{i(\omega t - k_0(r_n + v_n t))\} dt \quad (6)$$

$$(n = 1, 2, \dots, N-1).$$

Кроме того,  $A_{0N}$  определяется формулой (6) с  $n = N$  и  $T_b = \infty$ .

В формулах (4) — (6) величины  $\gamma_{0n}$  и  $\gamma_{1n}$  соответственно есть коэффициенты прохождения излучения из  $n$ -го вакуумного отсека и  $n$ -ой пластины на  $+\infty$ :

$$\eta_{0n} = \exp \{i(\lambda - \lambda_0)(N-n)a\}, \quad \eta_{1n} = \exp \{i(\lambda - \lambda_0)(Na + (n-1)b)\}, \quad (7)$$

где

$$\lambda = (\varepsilon - \sin^2 \theta_0)^{1/2} \omega / c = \lambda' + i\lambda'', \quad \lambda_0 = (\omega/c) \cos \theta_0,$$

$\varepsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2 + i\mu c/\omega$  — диэлектрическая постоянная вещества пластин,  $\mu$  — коэффициент поглощения. Как и в работе [1],  $\mathbf{n}$  — единичный вектор направления излучения,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_0$  имеют одинаковые компоненты в плоскости  $x, y$ , равные  $\kappa$  ( $\kappa = (\omega/c) \sin \theta_0$ ), и продольные компоненты, равные соответственно  $\lambda$  и  $\lambda_0$ .

Усредним выражение (1) по всем возможным траекториям заряда. При этом  $\langle |A|^2 \rangle$  будет состоять из следующих трех членов:

$$\langle |A_1|^2 \rangle = \sum_{n=1}^N \langle |A_{1n}|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=n+1}^N \langle A_{1j}^* A_{1n} \rangle, \quad (8)$$

$$\langle |A_0|^2 \rangle = |A_{00}|^2 + \sum_{n=1}^N \langle |A_{0n}|^2 \rangle +$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N A_{00}^* \langle A_{0n} \rangle + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=j+1}^N \langle A_{0n}^* A_{0j} \rangle, \quad (9)$$

$$2 \operatorname{Re} \langle A_0^* A_1 \rangle = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N A_{00}^* \langle A_{1n} \rangle + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N \langle A_{0n}^* A_{1j} \rangle. \quad (10)$$

Согласно [4], введем условную вероятность  $\omega(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}, \mathbf{v}; t-t')$  того, что частица, находящаяся в данной пластине, в момент времени  $t$  имеет координату и скорость  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ , если в более ранний момент времени  $t'$  в той же пластине она имела координату и скорость  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{v}'$ . Как было отмечено в [4], эта величина зависит от разности  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

В работе [1] соответствующие условные вероятности значений координаты и скорости частицы в одной пластине связывались с задаваемыми значениями координаты и скорости частицы при влете в пластину. В случае же стопки пластин заданными являются только координата и скорость частицы при ее влете в первую пластину стопки. Поэтому при вычислении средних величин, входящих в формулы (8)–(10), появляющиеся условные вероятности необходимо связать с  $\Gamma_{1s}$  и  $\mathbf{v}_{1s}$ .

Например, имеем

$$\begin{aligned} \langle |A_{1n}|^2 \rangle &= 2 v^2 \exp \{ -\mu (Na + (n-1)b) \} \times \\ &\times \operatorname{Re} \int dr_n d\theta_n \int dr_n d\theta_n \int_0^a dt'' \int_0^a dt' \theta_n^i \theta_n^0 \exp \{ i[\omega(t' - t'') - \\ &- \mathbf{k} \mathbf{r}_n + \mathbf{k}^* \mathbf{r}_n^i] \} \mathcal{W}(\mathbf{r}_{1s}, \mathbf{v}_{1s}; \mathbf{r}_n^i, \mathbf{v}_n^i; t_0, t'' + (n-1)(T_a + T_b)) \times \\ &\times \omega(\mathbf{r}_n^i, \mathbf{v}_n^i; \mathbf{r}_n^i, \mathbf{v}_n^i; t' - t''), \end{aligned} \quad (11)$$

где величина  $W(\mathbf{r}'_m, \mathbf{v}'_m; \mathbf{r}''_n, \mathbf{v}''_n; t', t'')$  является естественным обобщением величины  $w(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}, \mathbf{v}; t-t')$  на случай стопки пластин и представляет собой условную вероятность того, что частица в момент времени  $t''$  находится в  $n$ -ой пластине и имеет координату  $\mathbf{r}''_n$  и скорость  $\mathbf{v}''_n$ , если в более ранний момент  $t'$  она находилась в  $m$ -ой пластине и имела координату  $\mathbf{r}'_m$  и скорость  $\mathbf{v}'_m$ . В частности, когда  $t'$  совпадает с  $t_{2(m-1)}$  или  $t_{2m-1}$  (т. е. частица находилась на передней или задней границе  $m$ -ой пластины), то вместо  $\mathbf{r}'_m$  и  $\mathbf{v}'_m$  следует брать  $\mathbf{r}_{ms}$ ,  $\mathbf{v}_{ms}$  или  $\mathbf{r}_m$ ,  $\mathbf{v}_m$ . Двумерный вектор  $\theta'_n$  (или  $\theta''_n$ ) лежит в плоскости, перпендикулярной к направлению вылета фотона  $\mathbf{n}$  и определяется соотношением

$$\theta'_n = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{p}\mathbf{v}'_n) - \mathbf{v}'_n}{v} \quad (12)$$

Найдем выражение для  $W(\mathbf{r}'_m, \mathbf{v}'_m; \mathbf{r}''_n, \mathbf{v}''_n; t', t'')$ . Очевидно, что искомая величина есть произведение соответствующих условных вероятностей  $w$ , просуммированное по всем возможным промежуточным значениям координат и направлениям скоростей заряда,

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}'_m, \mathbf{v}'_m; \mathbf{r}''_n, \mathbf{v}''_n; t', t'') = & \int w(\mathbf{r}'_m, \mathbf{v}'_m; \mathbf{r}_m, \mathbf{v}_m; t_{2m-1} - t') \times \\ & \times w(\mathbf{r}_{m+1, s}, \mathbf{v}_{m+1, s}; \mathbf{r}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+1}; T_a) \cdots \times \\ & \times w(\mathbf{r}_{ns}, \mathbf{v}_{ns}; \mathbf{r}''_n, \mathbf{v}''_n; t'' - t_{2(n-1)}) d\mathbf{r}_m d\theta_m d\mathbf{r}_{m+1} d\theta_{m+1} \cdots d\mathbf{r}_{n-1} d\theta_{n-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Если ширина вакуумных отсеков  $b$  равна нулю, то  $\mathbf{r}_{m+1, s} = \mathbf{r}_m$  и интеграл (13) можно вычислить согласно теореме о полной вероятности [5], и в результате, как и следовало ожидать, он оказывается равным  $w(\mathbf{r}'_m, \mathbf{v}'_m; \mathbf{r}''_n, \mathbf{v}''_n; t'' - t')$ .

Простое соотношение получается также для интеграла

$$\begin{aligned} & \int W(\mathbf{r}'_m, \mathbf{v}'_m; \mathbf{r}''_n, \mathbf{v}''_n; t', t'') \exp[\mu(z''_n - z'_m)] d\mathbf{r}''_n = \\ & = \int w(\mathbf{r}'_m, \mathbf{v}'_m; \mathbf{r}''_n, \mathbf{v}''_n; t'' - t' - (n-m)T_b) \exp[\mu(z''_n - z'_m + \\ & + (n-m)b)] d\mathbf{r}''_n = u_1(\theta'_m, \theta''_n; t'' - t' - (n-m)T_b) \exp[\mu(n-m)b] \end{aligned} \quad (14)$$

при произвольном значении  $b$ . Для последней величины имеется явное выражение [2]

$$u_1(\theta, \theta'; t) = \frac{\exp\{- (\theta - \theta')^2 / 4qt + \mu vt\}}{4\pi qt} \quad (15)$$

при

$$(2\mu qa^2/v)^{1/2} \ll 1,$$

где

$$q = q_0 \gamma^{-2}, \quad q_0 = \left( \frac{E_s}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{c}{8L}, \quad (16)$$

$m_0$  — масса покоя пролетающей частицы,  $L$  — радиационная единица длины вещества пластины,  $E_s = 21 \text{ МэВ}$ .

Дать общее явное выражение для величины (13) затруднительно. Однако, используя фурье-компоненты [6]

$$\begin{aligned} u(\theta, \theta'; t) &= \int w(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) \exp \{ i[\omega t - \mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] \} d\mathbf{r}' = \\ &= \sigma \exp \{ -\sigma [(\theta^2 + \theta'^2) \text{cth } x - 2\theta\theta'/\text{sh } x + gx] / \pi \text{sh } x, \quad (17) \\ \sigma &= \frac{(1-i)}{4} \sqrt{\frac{\omega}{q}}, \quad x = (1-i) \sqrt{\omega q} t, \quad g = \gamma^{-2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{i\mu c}{\omega}, \end{aligned}$$

можно всякий раз явно вычислить соответствующую фурье-компоненту функции  $W$ . Например,

$$\begin{aligned} U_1(\theta'_m, \theta''_{m+1}; t', t'') &= \int W(\mathbf{r}'_m, \mathbf{v}'_m; \mathbf{r}''_{m+1}, \mathbf{v}''_{m+1}; t', t'') \times \\ &\times \exp \{ i[\omega(t'' - t') - \mathbf{k}(\mathbf{r}''_{m+1} - \mathbf{r}'_m)] \} d\mathbf{r}''_{m+1} = \\ &= \sigma \varphi \exp \{ -\sigma [g(x' + x'') + (\text{cth } x' - 1/\alpha_1 \text{sh}^2 x') \theta_m'^2 + \\ &+ (\text{cth } x'' - 1/\alpha_1 \text{sh}^2 x'') \theta_m''^2 - 2\theta'_m \theta''_{m+1} / \alpha_1 \text{sh } x' \text{sh } x''] \} \times \\ &\times (\pi \alpha_1 \text{sh } x' \text{sh } x'')^{-1} = \varphi \tilde{U}_1(\theta'_m, \theta''_{m+1}; t', t''), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} x' &= (1-i) \sqrt{\omega q} (T_a - t' + (m-1)(T_a + T_b)), \\ x'' &= (1-i) \sqrt{\omega q} (t'' - m(T_a + T_b)), \\ \alpha_1 &= \text{cth } x' + \text{cth } x'' + x_b, \quad x_b = (1-i) \sqrt{\omega q} T_b, \\ \varphi &= \exp \{ i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) T_b \}. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично можно получить явные выражения для величин

$$\begin{aligned} U_n(\theta'_m, \theta''_{m+n}; t', t'') &= \int W(\mathbf{r}'_m, \mathbf{v}'_m; \mathbf{r}''_{m+n}, \mathbf{v}''_{m+n}; t', t'') \times \\ &\times \exp \{ i[\omega(t'' - t') - \mathbf{k}(\mathbf{r}''_{m+n} - \mathbf{r}'_m)] \} d\mathbf{r}''_{m+n}. \end{aligned} \quad (20)$$

Однако эти выражения достаточно громоздки и мы здесь не будем выписывать их.

## 2. Большие расстояния между пластинами

Характерно, что величина  $U_1$  содержит множитель  $\varphi$ . При вычислении интерференционных членов типа  $\langle \mathbf{A}_{1n+1}^* \mathbf{A}_{1n} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{A}_{0n}^* \mathbf{A}_{1n+2} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{A}_{0n}^* \mathbf{A}_{0n+2} \rangle$  и т. д. в результате умножения на соответствующие

коэффициенты прохождения (см. формулы (4) — (7)) множитель  $\varphi$  преобразуется в величину

$$\varphi_0 = \exp(iX_\gamma), \quad X_\gamma = \frac{\omega b}{2c\gamma^2}. \quad (21)$$

Например,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_{1n+1}^* \mathbf{A}_{1n} \rangle &= v^2 Q^{N-n+1} \varphi_0^* \int d\theta_n^* d\theta_{n+1}^* \times \\ &\times \int_0^{T_a} dt' \int_0^{T_a} dt'' \theta_n^* \theta_{n+1}^* u_1(\theta_0, \theta_n^*; t' + (n+1)T_a) \times \\ &\times \tilde{U}_1^*(\theta_n^*, \theta_{n+1}^*; t' + t_2(n-1), t'' + t_2n), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$Q = \exp(-\mu a). \quad (23)$$

Можно убедиться, что в общем случае величина  $U_n(\theta_m^*, \theta_{m+n}^*; t', t'')$  будет содержать множитель  $\varphi^n$ , а интерференционные члены типа  $\langle \mathbf{A}_{1m+n}^* \mathbf{A}_{1m} \rangle$  и т. д. будут содержать  $\varphi_0^n$ .

Таким образом, при выполнении условия

$$X_\gamma \gg 1 \quad (24)$$

указанные интерференционные члены являются быстро осциллирующими функциями от  $\omega$  и после усреднения по небольшому интервалу частот обратятся в нуль. Легко видеть, что условие (24) имеет ясный физический смысл, а именно, оно означает, что расстояние между пластинами в стопке много больше зоны формирования переходного излучения в вакууме,  $z_{\text{вак}} = 2c\gamma^2/\omega$ .

В результате имеем, что при больших расстояниях между пластинами из средних величин, входящих в (8) — (10), остаются лишь  $\langle |\mathbf{A}_{1n}|^2 \rangle$ ,  $\langle |\mathbf{A}_{0n}|^2 \rangle$ ,  $\langle \mathbf{A}_{0n-1}^* \mathbf{A}_{0n} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{A}_{0n-1}^* \mathbf{A}_{1n} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{A}_{0n}^* \mathbf{A}_{1n} \rangle$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ). При этом, например,

$$\begin{aligned} \langle |\mathbf{A}_{1n}|^2 \rangle &= 2v^2 Q^{N-n} \text{Re} \int d\theta_n^* d\theta_n \int_0^{T_a} dt'' \int_{t'}^{T_a} dt' \theta_n^* \theta_n^* \times \\ &\times u_1(\theta_0, \theta_n^*; t'' + (n-1)T_a) u(\theta_n^*, \theta_n^*; t' - t''); \\ \langle |\mathbf{A}_{0n}|^2 \rangle &= v^2 Q^{N-n} \int d\theta_n \int_0^{T_b} dt \int_0^{T_b} dt' \theta_n^2 u_1(\theta_0, \theta_n; nT_a) \times \\ &\times \exp[i(\omega - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_n)(t - t')]. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для указанных средних величин в (8) — (10) и затем используя (1), получим частотно-угловое распределение интенсивности излучения при больших расстояниях между пластинами, когда выпол-

няется условие (24). Это распределение при  $N \neq 1$ , вообще говоря, не пропорционально частотно-угловому распределению для одной пластины (формулы (10)—(12) работы [2]). Однако после интегрирования по углу излучения  $\theta_0$  нетрудно убедиться, что частотный спектр

$$\langle dW(\omega) \rangle_{N, a} = \int \langle dW(\theta_0, \omega) \rangle_{N, a} d\theta_0$$

для рассматриваемой стопки совпадает с частотным спектром для одной пластины, умноженным на эффективное число пластин

$$N_{\text{эфф}} = \frac{1 - Q^N}{1 - Q}, \quad (25)$$

а именно

$$\langle dW(\omega) \rangle_{N, a} = N_{\text{эфф}} \langle dW(\omega) \rangle_{1, a}, \quad (26)$$

где  $\langle dW(\omega) \rangle_{1, a}$  определяется формулой (15) работы [2].

### 3. Приближение ближайших соседей

Результат предыдущего раздела является весьма естественным. Аналогичный результат в случае обычного переходного излучения (т. е. без учета влияния многократного рассеяния) был получен ранее [7]. Когда же условие (24) не выполняется, необходимо учитывать интерференционные члены между разными пластинами и отсеками ( $\langle A_{1j}^* A_{1n} \rangle$  при  $n \neq j$ ,  $\langle A_{0n}^* A_{0j} \rangle$  при  $j \neq n + 1$  и  $j \neq n$  и т. д.).

Однако оказывается, что когда величина

$$x_a = (1 - i) \sqrt{\omega q} T a \quad (27)$$

по модулю больше или, по крайней мере, порядка единицы, в первом приближении можно не учитывать все интерференционные члены, а ограничиться только учетом интерференции между «ближайшими соседями», т. е. членов вида  $\langle A_{1n+1}^* A_{1n} \rangle$ .

Действительно, ввиду наличия величины  $\text{sh}x$  в знаменателе функции  $u$  и величины  $\text{sh}x' \text{sh}x''$  в знаменателе функции  $U_1$  интерференционные члены, соответствующие областям, отделенным друг от друга одной или большим числом пластин, содержат фактор  $1/\text{sh}x_a$ , который мал по модулю при

$$|x_a| \gg 1. \quad (28)$$

Аналогичная ситуация имеет место также и в том случае, когда толщина пластины порядка или больше длины поглощения, т. е.  $\mu a \gtrsim 1$ .

Таким образом, в приближении ближайших соседей имеем

$$\int \langle |A_{11}|^2 \rangle d\theta_0 = \sum_{n=1}^N \int \langle |A_{1n}|^2 \rangle d\theta_0 + 2 \text{Re} \sum_{n=1}^{N-1} \int \langle A_{1n+1}^* A_{1n} \rangle d\theta_0,$$

$$\int \langle |A_{00}|^2 \rangle d\theta_0 = \int |A_{000}|^2 d\theta_0 + \sum_{n=1}^N \int \langle |A_{0n}|^2 \rangle d\theta_0, \quad (29)$$

$$2 \operatorname{Re} \int \langle \dot{\mathbf{A}}_0 \mathbf{A}_1 \rangle d\theta_0 = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N \int_{(j=n, n+1)} \langle \dot{\mathbf{A}}_{0n} \mathbf{A}_{1j} \rangle d\theta_0 + \\ + 2 \operatorname{Re} \int \langle \dot{\mathbf{A}}_{00} \mathbf{A}_{11} \rangle d\theta_0.$$

Интегралы, входящие в правые части формул (29), нетрудно вычислить явно. При этом для вычисления величины  $\int \langle \dot{\mathbf{A}}_{1n+1} \mathbf{A}_{1n} \rangle d\theta_0$  мы воспользуемся (18), а остальные величины вычисляются аналогично тому, как это было сделано в [1, 2]. В результате получим

$$\langle dW(\omega) \rangle_{N, a} = N_{\text{эфф}} \langle dW(\omega) \rangle_{1, a} + \\ + \frac{2e^2}{\pi c} (N_{\text{эфф}} - 1) [B_0 - (H_1 + H_2) + J] d\omega, \quad (30)$$

где величина  $\langle dW(\omega) \rangle_{1, a}$  определяется формулой (15) работы [2] с учетом условия (28),

$$B_0 = \operatorname{ci}(X_1) + \cos(X_1) + X_1 \operatorname{si}(X_1), \quad (31)$$

$$J = -Q \operatorname{Re} \exp(i X_1) \int_0^{x_a} dx_1 \int_0^{x_a} dx_2 \frac{\exp[-s_2(x_1 + x_2) - h x_1]}{[\operatorname{sh}(x_1 + x_2) + x_b \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2]^2},$$

$$H_1 = -\operatorname{Re} \exp(i X_1) \int_0^{x_a} \frac{\exp[-(s_2 + h)x]}{\operatorname{ch}^2 x} \left[ \frac{1}{\operatorname{th} x + x_b} + \right. \\ \left. + s_1 \exp[s_1(\operatorname{th} x + x_b)] \operatorname{Ei}[-s_1(\operatorname{th} x + x_b)] \right] dx, \quad h = 2i\pi c/\omega,$$

$H_2$  получается из  $H_1$  формальной подстановкой  $h = 0$ . Выражения (31) для величин  $B_0$  и  $J$  даны в случае, когда  $x_b \neq 0$ .

Заметим, что если выполняется условие (24), то второе слагаемое в (30), обусловленное интерференцией между излучениями, образованными в соседних пластинах, обращается в нуль после усреднения по небольшому интервалу частот, и мы, естественно, приходим к формуле (26).

Если же  $b = 0$ , то нетрудно убедиться, что формула частотного спектра для такой «стопки», как и следовало ожидать, совпадает с формулой для одной пластины, толщина которой равна  $Na$ .

До сих пор мы рассматривали приближение ближайших соседей. В случае, когда  $|x_a|$  (или  $\mu a$ ) порядка или, тем более, меньше единицы, это приближение может стать неудовлетворительным. Для его улучшения необходимо учесть члены интерференции между более дальними соседями. В первую очередь это члены типа  $\langle \dot{\mathbf{A}}_{1m+2} \mathbf{A}_{1m} \rangle$ ,  $\langle \dot{\mathbf{A}}_{0m+1} \mathbf{A}_{0m} \rangle$  и  $2 \operatorname{Re} \langle \dot{\mathbf{A}}_{0m} \mathbf{A}_{1j} \rangle$  ( $j = m + 2, m - 1$ ), затем — члены типа  $\langle \dot{\mathbf{A}}_{1m+3} \mathbf{A}_{1m} \rangle$ ,

$\langle \dot{A}_{0m+2} \dot{A}_{0m} \rangle$ ,  $2 \operatorname{Re} \langle \dot{A}_{0m} \dot{A}_{1j} \rangle$  ( $j = m+3, m-2$ ) и т. д. Таким образом мы получим некоторый ряд, параметром разложения которого служит величина порядка  $\exp(-x_a)$  (или  $\exp(-\mu a)$ ). Поскольку (см. (27)) величина  $x_a$  имеет положительную действительную часть, то этот ряд сходится весьма быстро начиная с членов, содержащих  $m|x_a| \sim 1$  (или  $m\mu a \sim 1$ ). Физически это означает, что при наличии многократного рассеяния фазы волн расстраиваются (а при наличии поглощения амплитуды волн уменьшаются) и поэтому интерференция между волнами, возникающими в достаточно отдаленных участках траектории заряда, становится несущественной.

#### 4. Краевой эффект

В [1] (см. также [8]) было показано, что частотный спектр  $\langle dW(\omega)/d\omega \rangle_{1,a}$  полного излучения, образованного в непоглощающей пластине достаточно большой толщины

$$a \gg z_{\text{торм}} = \frac{c\gamma}{(\omega q_0)^{1/2}}, \quad (32)$$

имеет следующий асимптотический вид:

$$\left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1,a}^{\text{пол}} \approx \frac{a}{z_{\text{торм}}} \frac{dW_M(\omega)}{d\omega}. \quad (33)$$

Величина  $z_{\text{торм}}^{-1} dW_M(\omega)/d\omega$  дается известной формулой Мигдала [4] и представляет собой интенсивность тормозного излучения с единицы длины пути частицы в безграничной непоглощающей среде.

Разность между интенсивностью полного излучения и ее линейной частью (33) естественно назвать краевым эффектом [1, 8]

$$\left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1,a}^{\text{кр}} = \left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1,a}^{\text{пол}} - \frac{a}{z_{\text{торм}}} \frac{dW_M(\omega)}{d\omega}. \quad (34)$$

В случае стопки из  $N$  непоглощающих пластин краевой эффект можно определить аналогичной формулой, только с дополнительным множителем  $N$  во втором слагаемом:

$$\left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{N,a}^{\text{кр}} = \left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{N,a}^{\text{пол}} - \frac{Na}{z_{\text{торм}}} \frac{dW_M(\omega)}{d\omega}. \quad (35)$$

Как показано выше в разделе 2, при выполнении условия (24) интенсивность полного излучения в пластинках стопки аддитивно складывается. Тогда спектр краевого эффекта в стопке просто пропорционален спектру краевого эффекта в одной пластине этой стопки:

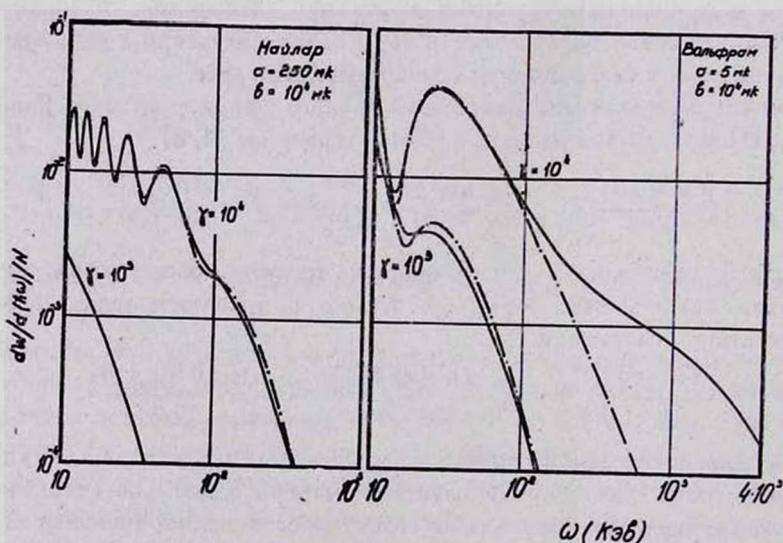
$$\left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{N,a}^{\text{кр}} = N \left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1,a}^{\text{кр}} \quad (\text{при } b \gg z_{\text{вак}}). \quad (36)$$

Другими словами, для стопки с большими расстояниями между пластинками справедливы все результаты, полученные для полного излучения и краевого эффекта в одной пластине [1].

В литературе влияние многократного рассеяния на образование излучения в непоглощающей периодической среде до сих пор рассматривалось в модели, где периодической неоднородностью обладает лишь электронная плотность, а рассеивающие ядра считаются однородно распределенными по всей среде [9]. При этом краевой эффект определяется формулой, аналогичной (35).

Как было показано в [1], при  $\gamma \ll \gamma_{кр}$  величина краевого эффекта (34) близка к спектру обычного переходного излучения (без учета многократного рассеяния). Поэтому в стопке с большими расстояниями между пластинами ( $b \gg z_{внк}$ ) результаты обеих теорий, будучи слабо зависящими от распределения рассеивающих ядер, должны практически совпасть в указанной области значений  $\gamma$  (некоторое различие может возникнуть в степени сглаживания интерференционных максимумов и минимумов). Результаты теорий должны совпадать также при  $\omega \ll \omega_1$  [1] и  $\gamma > \gamma_{кр}$ . Однако при  $\gamma \gg \gamma_{кр}$  и  $\omega > \omega_1$  они будут разными, поскольку в модели однородно распределенных ядер заряд рассеивается везде одинаково и поэтому отсутствует то своеобразное обогащение спектра [1], которое имеет место, когда рассеивающие ядра сосредоточены только внутри пластин.

Это хорошо видно также из результатов численного расчета спектров краевого эффекта (см. рисунок). В случае легкого вещества (майлар) приведенные кривые в обеих теориях совпадают (ср., однако, с [10]). В случае же вольфрама при  $\gamma \gg 10^4$  и больших частотах  $\omega > 100$  кэв разница



Частотные спектры краевого эффекта в стопке майларовых ( $\omega_0 = 24,4$  эв,  $L = 28,7$  см) и вольфрамовых ( $\omega_0 = 80,3$  эв,  $L = 0,35$  см) пластин. Сплошные кривые вычислены согласно (3) и работе [1]. Штрих-пунктирные кривые вычислены согласно модели однородно распределенных ядер (работа [9], стр. 368). При  $\gamma = 10^3$  в случае майлара обе кривые совпадают. Для всех случаев спектр обычного переходного излучения (без учета многократного рассеяния) совпадает с соответствующими штрих-пунктирными кривыми с точностью до нескольких процентов.

между двумя подходами весьма значительна. Сходная ситуация возникает, вероятно, также и в случае, когда расстояния между пластинами в стопке не очень велики.

Обобщим теперь определение краевого эффекта ((34) или (35)) на случай конечной поглощающей способности вещества. Линейная часть (33) для поглощающей пластины имеет место [2] лишь при условии

$$z_{\text{торм}} \ll a \ll \mu^{-1}, \quad (37)$$

что, очевидно, возможно только, если  $\mu z_{\text{торм}} \ll 1$ .

Когда же  $\mu z_{\text{торм}} \gg 1$ , механизм образования тормозного излучения как бы подавлен, и полное излучение целиком является краевым эффектом.

Имея в виду выражение (32) для  $z_{\text{торм}}$ , нетрудно получить, что это происходит при

$$\gamma \gg (\omega q_0)^{1/2}/c\mu \quad \text{или} \quad \omega \ll (\mu c \gamma)^2/q_0. \quad (38)$$

Кроме того, краевой эффект не должен зависеть от  $a$  при достаточно больших значениях  $a$ , таких, что

$$a \gg \min \{ z_{\text{торм}}, z_{\text{вещ}}, \mu^{-1} \}, \quad (39)$$

где  $z_{\text{вещ}} = 2c/\omega (\gamma^{-2} + \omega_0^2/\omega^2)$  — зона формирования переходного излучения в веществе.

Таким образом, с учетом всего сказанного можно дать следующее общее определение краевого эффекта:

$$\left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1, a}^{\text{кэ}} = \left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1, a}^{\text{пол}} - \frac{1-Q}{\mu z_{\text{торм}}} \frac{dW_M(\omega)}{d\omega} \quad (40)$$

(здесь величина  $z_{\text{торм}}^{-1} dW_M(\omega)/d\omega$  получается из формулы Мигдала заменой  $\omega_0^2$  на  $\omega_0^2 + i\mu\omega$ ).

Легко видеть, что при  $\mu a \ll 1$  эта формула переходит в (34). Имея в виду формулу (15) работы [2] для  $\langle dW(\omega)/d\omega \rangle_{1, a}^{\text{пол}}$ , можно также убедиться, что при выполнении (39) величина  $\langle dW(\omega)/d\omega \rangle_{1, a}^{\text{кэ}}$ , определяемая (40), не зависит от  $a$ . Наконец, при  $\mu z_{\text{торм}} \gg 1$  (или (38)) второе слагаемое в (40), соответствующее тормозному излучению с учетом многократного рассеяния и поглощения, мало.

Для стопки из  $N$  поглощающих пластин краевой эффект можно определить аналогично (40) с заменой  $Q$  на  $Q^N$  во втором слагаемом, или

$$\left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{N, a}^{\text{кэ}} = \left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{N, a}^{\text{пол}} - \frac{(1-Q^N) N_{\text{эфф}}}{\mu z_{\text{торм}}} \frac{dW_M(\omega)}{d\omega}, \quad (41)$$

где  $N_{\text{эфф}}$  дается формулой (25). Нетрудно убедиться, что при  $\mu a \ll 1$  формула (41) переходит в (35) с заменой  $N$  на  $N_{\text{эфф}}$ .

При больших вакуумных отсеках (см. (24)), как уже говорилось, происходит сложение интенсивностей полных излучений, а следовательно, и краевых эффектов пластин стопки с учетом их поглощения в последующих пластинах:

$$\left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{N, a}^{кэ} = N_{эфф} \left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1, a}^{кэ} \quad (\text{при } b \gg z_{вак}). \quad (42)$$

Если же неравенство (24) не выполняется, то в правой части формулы (42) возникают интерференционные члены. В частности, в приближении ближайших соседей (см. (30)) интерференционный член имеет вид

$$\frac{2e^2}{\pi c} (N_{эфф} - 1) (B_0 - H_1 - H_2 + J).$$

Рассмотрим вопрос об экспериментальном выделении краевого эффекта из полного излучения.

Как видно из определения краевого эффекта (40) или (41), для его выделения из полного излучения необходимо прежде всего найти  $z_{торм}^{-1} dW_M(\omega)/d\omega$ . Эта величина является функцией  $\omega$  и  $\gamma$ , но не зависит от  $a$ . От  $a$  не будет зависеть также и  $\langle dW(\omega)/d\omega \rangle_{1, a}^{кэ}$ , если значение  $a$  достаточно велико (39).

Пусть  $a_1$  и  $a_2$  удовлетворяют условию (39). Тогда из равенства значений  $\langle dW(\omega)/d\omega \rangle_{1, a}^{кэ}$  при  $a = a_1$  и  $a_2$  сразу следует, что

$$z_{торм}^{-1} \frac{dW_M(\omega)}{d\omega} = \frac{\mu \left( \left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1, a_1}^{пол} - \left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1, a_2}^{пол} \right)}{(\exp(-\mu a_2) - \exp(-\mu a_1))}. \quad (43)$$

Таким образом, для экспериментального выделения краевого эффекта из полного излучения, образованного в данной пластине или стопке пластин, необходимо, вообще говоря, сделать три измерения. Два измерения необходимо сделать на одной пластине при толщинах  $a_1$  и  $a_2$ , удовлетворяющих (39), для нахождения  $z_{торм}^{-1} dW_M(\omega)/d\omega$  (по формуле (43)), а третье измерение — на данной пластине или стопке пластин.

Часто, однако, за краевой эффект принимают разность между полными излучениями, образованными в данной стопке и в одной пластине с толщиной  $Na$ , т. е.

$$\left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{N, a}^{пол} - \left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1, Na}^{пол}. \quad (44)$$

Очевидно, что эта разность стремится к нулю в следующих случаях: при  $N \rightarrow 1$ , при  $b \rightarrow 0$ , а также при  $\mu a \gg 1$ . Следовательно, эта разность не может описывать краевой эффект в этих случаях. Однако она не всегда соответствует краевому эффекту, определяемому (41), даже в том случае, когда  $N_{эфф} \gg 1$  (т. е.  $N \gg 1$  и  $\mu a \ll 1$ ) и  $b \gg z_{вак}$ . Действительно, подставляя (41) в (44), а также имея в виду (42), мы видим, что разность (44) равна

$$N_{эфф} \left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1, a}^{кэ} - \left\langle \frac{dW(\omega)}{d\omega} \right\rangle_{1, Na}^{кэ}. \quad (45)$$

Эта величина приближенно соответствует краевому эффекту в стопке, т. е.

первому слагаемому, если второе слагаемое много меньше первого. Однако это не имеет места, например, в случае, когда  $a \ll z_{\text{вещ}}$ .

Ереванский физический институт

Поступила 17.XII.1976.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Гарибян, Ян Ши. ЖЭТФ, 70, 1627 (1976).
2. Л. А. Варданян, Г. М. Гарибян, Ян Ши. Изв. АН АрмССР, Физика, 11, 329 (1976).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, М., 1966, § 66.
4. А. Б. Мигдал. ДАН СССР, 96, 49 (1954).
5. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей, М., 1954, стр. 57.
6. И. И. Гольдман. ЖЭТФ, 38, 1866 (1960).
7. Г. М. Гарибян. ДАН АрмССР, 33, 193 (1961).
8. Ф. Ф. Терновский. ЖЭТФ, 39, 171 (1960).
9. М. А. Тер-Микаелян. а) Письма ЖЭТФ, 8, 100 (1968); б) Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1969.
10. Ф. Р. Арутюнян, А. А. Назарян, А. А. Франлян. ЖЭТФ, 62, 2044 (1972).

### ԳՆՐԱՐԱԳ ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԺԱՌԱԳԱՅՔՈՒՄԸ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ՇԵՐՏՈՒՄ ԿԼԱՆՄԱՆ ԵՎ ԲԱԶՄԱԿԻ ՑՐՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Գ. Մ. ՂԱՐԻԲՅԱՆ, ՑԱՆ ՇԻ

Կառուցված է թիթեղների շերտով անցնող զերարագ մասնիկների ճառագայթման ընդհանուր տեսություն հաշվի առնելով կլանումը և բազմակի ցրումը թիթեղներում: Դիտարկված են հաստ թիթեղների և լայն միջթիթեղային տարածությունների մասնավոր դեպքերը: Դիտարկված է նաև եզրային էֆեկտի հարցը:

### RADIATION FROM AN ULTRARELATIVISTIC CHARGE IN A STACK OF PLATES WITH ABSORPTION AND ALLOWANCE FOR MULTIPLE SCATTERING

G. M. GARIBYAN, C. YANG

A general theory is constructed for the production of X-rays and harder radiation from an ultrarelativistic charge passing through a stack of plates with absorption taking into account for multiple scattering. Two partial cases are considered: a stack with great vacuum spacings and a stack with relatively thick plates (nearest neighbourhood approximation). The problem of boundary effect and its separation from the total radiation is investigated.

