Изв. АН Армянской ССР, Физика, 12, 28—40 (1977)

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОННОГО СПЕКТРА ПОЛУПРОВОДНИКА, ПОМЕЩЕННОГО В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И В ПОЛЕ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

А. Г. АЛЕКСАНЯН, Э. Г. МИРЗАБЕКЯН

Исследуется энергетический спектр полупроводника, помещенного в магнитное поле и в поле ультразвуковой волны. Получены аналитические выражения для закона дисперсии, эффективной массы, ширин запрещенной и разрешенной зон, а также для волновой функции.

1. Наряду с поиском различных лазерных схем и методов возбуждения с целью обеспечения максимально высоких параметров генераторов (кпд, мощность и т. д.) ведутся исследования по освоению новых частотных диапазонов. Хорошо известно [1], что полупроводниковые квантовые генераторы работают на промежуточно- и сильно-легированных полупроводниках, где оптические переходы происходят между примесными хвостами зоны проводимости и валентной зоны; при этом частота излучения $\omega_0 \sim \frac{\Delta}{\hbar}$ (Δ — ширина невозмущенной запрещенной зоны). Однако полупроводниковые соединения имеют такую ширину запрещенной зоны, что соответствующая частота попадает в область $\omega_0 \gtrsim 10^{14}$ *сек*$^{-1}$. Наша задача состоит в получении такого зонного энергетического спектра, чтобы соответствующие ширины запрещенных зон лежали в диапазоне частот $\omega_0 \approx 10^{12} \div 10^{14}$ *сек*$^{-1}$. При этом запрещенная зона должна быть трехмерной [2], поскольку в работе [3] показано, что отсутствие запрещенной зоны в каком-либо из направлений (x, y, z) приводит к неизбежным энергетическим потерям в результате излучения фононов неравновесными электронами.

2. С этой целью мы рассмотрим, как изменится энергетический спектр электронов в полупроводнике при одновременном влиянии квантующего магнитного поля H и продольного поля ультразвуковой волны $V_s \cos \frac{\omega}{s}(z - st) = f(z, t)$, где $V_s = \delta V_d$ — амплитуда, ω — частота, s — скорость ультразвука, V_d — потенциал деформации, δ — деформация в волне, $\delta = (2w/C_{11})^{1/2}$, w — плотность ультразвуковой волны, C_{11} — упругая константа вещества.

Энергетический спектр электронов определяется из решения уравнения Шредингера, содержащего основной потенциал решетки $V_0(r)$, магнитное поле H и периодический потенциал ультразвуковой волны $f(z, t)$.

Получить решение такого уравнения в общем случае невозможно, однако в силу того, что период ультразвуковой волны $\frac{s}{\omega} = \frac{\lambda_0}{2\pi}$ и магнитная длина $\lambda_H = \left(\frac{c\hbar}{eH}\right)^{1/2}$ значительно больше периода d основного потенциала $V_0(r)$, а амплитуды $\frac{1}{m^*}\left(\frac{e}{c}H\lambda_H\right)^2$, $V_s \ll V_0(r)$, задачу можно решать в приближении метода эффективной массы.

Если направления магнитного поля и ультразвуковой волны совпадают (выберем ось z в этом направлении), то в этом приближении уравнение Шредингера, определяющее спектр носителей в полупроводнике, будет иметь вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m^*}\left(\hat{P} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + f(z, t)\right]\psi(x, y, z, t), \tag{1}$$

где $\hat{P} = -i\hbar\nabla$, $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал магнитного поля в точке нахождения электрона, m^* — эффективная масса электрона в отсутствии внешних полей. Векторный потенциал удобно выбрать в следующей форме:

$$\mathbf{A} = [0, Hx, 0], \ \mathbf{H} = [0, 0, H].$$

Переходя в уравнении (1) в систему координат, связанную с волной $\xi = \frac{\omega}{s}(z - st)$, и введя обозначение $\lambda_H = \left(\frac{c\hbar}{eH}\right)^{1/2}$, вместо (1) получим следующее уравнение:

$$-\frac{2m^* i}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \lambda_H^{-4}x^2 - 2i\lambda_H^{-2}x\frac{\partial}{\partial y} - \right.$$
$$\left. - \frac{2m^* i\omega}{\hbar}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{2m^* V_s}{\hbar^2}f(\xi)\right]\psi(x, y, \xi, t). \tag{2}$$

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$\psi(x, y, \xi, t) = \exp\left\{ik_y y + \frac{im^* s^2}{\hbar\omega}\xi\right\} G_l(x) W(\xi) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \tag{3}$$

где k_y — волновое число электрона в направлении y, а E — полная энергия электрона.

Подставляя (3) в (2), после несложных преобразований для функций $G_l(x)$ и $W(\xi)$ получим уравнения

$$\frac{\partial^2 G_l(x)}{\partial x^2} + \frac{2m^*}{\hbar^2}\left[E + \frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{m^* s}{\hbar}\right)^2 + \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2\lambda_H^{-4}}{2m^*}(x - x_0)^2\right] G_l(x) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 W(\xi)}{\partial\xi^2} - \left[\frac{s^2\alpha^2}{\omega^2} + \frac{2m^* s^2}{\hbar^2\omega^2}f(\xi)\right] W(\xi), \tag{5}$$

где $\alpha = \mathrm{const}$ определяется из спектра уравнения (4), а $x_0 = -k_y\lambda_H^2$.

Уравнение (4) описывает движение электрона в плоскости (x, y) и является уравнением гармонического осциллятора со смещенным центром x_0, колеблющегося с частотой $\Omega = \frac{eH}{m^* c}$. Поэтому можем заключить, что постоянная $\left(E + \frac{m^* s^2}{2} + \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2 m^*}\right)$, играющая роль энергии осциллятора, может принимать значения $\hbar\Omega\left(l + \frac{1}{2}\right)$, где $l = 0, 1, 2 \cdots$.

Таким образом, имеем

$$\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2 m^*} = \hbar\Omega\left(l + \frac{1}{2}\right) - \frac{m^* s^2}{2} - E, \tag{6}$$

а соответствующие нормированные волновые функции есть

$$G_l(x) = \left(\frac{2\pi^{1/2} \lambda_H}{\Omega_0 2^l l!}\right)^{1/2} H_l\left(\lambda_H^{-1}(x - x_0)\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_H^{-2}(x - x_0)^2\right\}, \tag{7}$$

где Ω_0 — объем элементарной ячейки, а H_l — полином Эрмита.

Уравнение (5), описывающее движение частицы вдоль оси z, является уравнением Хилла. Согласно [4] решение (5) ищем в виде

$$W(\xi) = e^{ik_z\xi} U_{k_z}(\xi), \tag{8}$$

где k_z — безразмерное волновое число электрона вдоль направления z $U_{k_z}(\xi)$ — периодическая функция с периодом π.

Разложим функции $U_{k_z}(\xi)$ и $f(\xi)$ в ряд Фурье

$$U_{k_z}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{k_z n} e^{i2n\xi}, \quad f(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m e^{i2m\xi}. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим следующую систему уравнений:

$$\left[(k_z + 2n)^2 + \varphi_0\right] T_{k_z n} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \varphi_m T_{k_z, n-m} = 0, \tag{10}$$

где

$$\varphi_0 = -\frac{\varkappa}{V_s}\left[\hbar\Omega\left(l + \frac{1}{2}\right) - \frac{m^* s^2}{2} - E + \frac{2}{\pi} V_s\right], \tag{11}$$

$$\varkappa = \frac{2 m^* s^2}{\hbar^2 \omega^2} V_s, \tag{12}$$

$$\varphi_m = \frac{2\varkappa}{\pi} \frac{(-1)^m}{1 - 4m^2}. \tag{13}$$

Согласно [4], корни определителя Хилла уравнения (10) являются корнями уравнения

$$\sin^2 \frac{k_z \pi}{2} = \Delta(0, \varphi_0) \sin^2 \frac{\pi}{2}\sqrt{\varphi_0}, \tag{14}$$

где $\Delta(0, \varphi_0) = \Delta(k_z, \varphi_0)|_{k_z=0}$ — бесконечный определитель вида

$$\Delta(0,\ \varphi_0)=[D_{mn}],\ D_{mm}=1,\ D_{mn}=-\frac{\varphi_{m-n}}{4m^2-\varphi_0},\ m\neq n, \tag{15}$$

у которого все диагональные элементы равны единице, а недиагональные — пропорциональны φ_{m-n}. Согласно [4, 5] такой определитель можно представить в виде бесконечного ряда по степеням φ_m следующим образом. Образуем произведение всех диагональных элементов, которое, очевидно, равно единице. Затем выпишем слагаемые, образованные произведениями всех диагональных элементов, кроме двух (с индексами (n, n) и (m, m)), замененных на D_{nm} и D_{mn}; далее образуем произведение всех диагональных элементов, кроме трех (с индексами (n, n), (m, m) и (p, p)), которые заменим на элементы D_{nm}, D_{mp}, D_{pn}, и т. д. В результате получим

$$\Delta(0,\ \varphi_0)=1-\frac{1}{2!}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq n}}^{\infty}D_{nm}D_{mn}+$$

$$+\frac{1}{3!}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq m,\ p}}^{\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq p}}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}D_{nm}D_{mp}D_{pn}-$$

$$-\frac{3}{4!}\Bigg[2\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq m,\ t}}^{\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq p}}^{\infty}\sum_{\substack{p=-\infty\\ p\neq t}}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}D_{nm}D_{mp}D_{pt}D_{tn}-$$

$$-\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq n}}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{p=-\infty\\ p\neq t}}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}D_{mn}D_{nm}D_{pt}D_{tp}\Bigg]+\cdots. \tag{16}$$

Подставляя D_{mn} из (15), после некоторых преобразований получим

$$\Delta(0,\ \varphi_0)=1+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\cdots, \tag{17}$$

где

$$\Delta_1=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\varphi_m|^2}{[4n^2-\varphi_0][4(n+m)^2-\varphi_0]}, \tag{18}$$

$$\Delta_2=\frac{1}{3!}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0,\,-n}}^{\infty}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_n\varphi_m\varphi_{m+n}}{[4p^2-\varphi_0][4(n+p)^2-\varphi_0][4(n+m+p)^2-\varphi_0]}, \tag{19}$$

$$\Delta_3=-\frac{3}{4!}\Bigg[2\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq n,\ t}}^{\infty}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq p}}^{\infty}\sum_{\substack{p=-\infty\\ p\neq t}}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\times$$

$$\times \frac{\varphi_{m-n}\varphi_{n-p}\varphi_{p-t}\varphi_{t-m}}{[4m^2-\varphi_0][4n^2-\varphi_0][4p^2-\varphi_0][4t^2-\varphi_0]} -$$

$$-\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq n}}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{p=-\infty\\ p\neq t}}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_{m-n}\varphi_{n-m}\varphi_{p-t}\varphi_{t-p}}{[4m^2-\varphi_0][4n^2-\varphi_0][4p^2-\varphi_0][4t^2-\varphi_0]}\Bigg]. \tag{20}$$

Последующие члены разложения можно вычислить согласно выражению

$$\Delta_n(\varphi_0)=\frac{1}{n!}\sum_{\substack{t_1=-\infty\\ t_1\neq t_2, t_n}}^{\infty}\sum_{\substack{t_2=-\infty\\ t_2\neq t_3}}^{\infty}\sum_{\substack{t_m=-\infty\\ t_m\neq t_{m+1}}}^{\infty}\cdots\sum_{t_n=-\infty}^{\infty}\cdots\begin{vmatrix} q_{t_1t_1}q_{t_1t_2}\cdot\cdot\cdot\cdot q_{t_1t_n}\\ q_{t_2t_1}q_{t_2t_2}\cdot\cdot\cdot\cdot q_{t_2t_n}\\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\ q_{t_nt_1}q_{t_nt_2}\cdot\cdot\cdot\cdot q_{t_nt_n}\end{vmatrix}, \tag{21}$$

где

$$q_{t_nt_n}=0,\quad q_{t_nt_m}=\frac{\varphi_{t_n-t_m}}{4t^2-\varphi_0},\qquad m\neq n, \tag{22}$$

$n=1, 2, 3\ldots$ определяет порядок определителя (21) и необходимого приближения в (16). Вычисление Δ_1 и Δ_2 дается в приложении.

Для $\Delta(0, \varphi_0)$ имеем следующее выражение:

$$\Delta(0,\ \varphi_0)=1+\frac{\pi}{4}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\varphi_0}}{\sqrt{\varphi_0}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n|^2}{n^2-\varphi_0}+\Gamma(\varphi_0), \tag{23}$$

где $\Gamma(\varphi_0)=\Delta_2+\Delta_3+\cdots$.

Подставив (23) в (14), получим

$$\sin^2\frac{k_z\pi}{2}=[1+\Gamma(\varphi_0)]\sin^2\frac{\pi}{2}\sqrt{\varphi_0}+\frac{\pi}{8}\frac{\sin\pi\sqrt{\varphi_0}}{\sqrt{\varphi_0}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n|^2}{n^2-\varphi_0}=\Phi(\varphi_0), \tag{24}$$

откуда видно, что $\Phi(\varphi_0)$ — ограниченная функция φ_0,

$$0\leqslant\Phi(\varphi_0)\leqslant 1, \tag{25}$$

а φ_0 — периодическая функция от k_z,

$$\varphi_0=K\left(\sin^2\frac{k_z\pi}{2}\right). \tag{26}$$

Уравнение (24) определяет закон дисперсии, неравенство (25) определяет область разрешенной энергии, а равенство (23) — границы разрешенных и запрещенных зон. Минимумы зон определяются точками $k_z=2n+1$, а максимумы — точками $k_z=2n$.

Решить точно уравнение (24) невозможно, поэтому мы найдем приближенное решение. С этой целью разложим (24) в ряд Тейлора в окрестности точки

$$t=\sqrt{\varphi_0}-r_t. \tag{27}$$

С точностью до квадратичного члена разложения включительно имеем следующее квадратное уравнение относительно r_t:

$$\Phi(\varphi_0) = \frac{1-(-1)^t}{2} - \frac{\pi^2}{16}\frac{(-1)^t}{t^2}|\varphi_t|^2\left[1 - \frac{\varphi_{2t}}{12t} - \beta_t\right] + \\ + \frac{\pi^2}{2}(-1)^t K_t r_t + \frac{\pi^2}{4}(1+F_t)\, r_t^2, \tag{28}$$

где

$$F_t = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq t}}^{\infty} \frac{|\varphi_n|^2}{(n^2-t^2)^2} - \frac{1}{2t^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq t}}^{\infty}\frac{|\varphi_n|^2}{n^2-t^2} + \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{2t^2}\right)\frac{|\varphi_t|^2}{8t^2} + \frac{4}{\pi^2}(-1)^t\lambda_t, \tag{29}$$

$$\lambda_t = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial r_t^2}\left[(\Delta_2+\Delta_3+\cdots+\Delta_n)\sin^2\frac{\pi}{2}\sqrt{\varphi_0}\right]_{r_t=0}, \tag{30}$$

$$K_t = \frac{1}{2t}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq t}}^{\infty}\frac{|\varphi_n|^2}{n^2-t^2} + \frac{3}{8}\frac{|\varphi_t|^2}{t^3} + \frac{4(-1)^t}{\pi^2}h_t, \tag{31}$$

$$\beta_t = \frac{1}{3!}\left\{\sum_{\substack{m=1\\ m\neq t}}^{\infty}\frac{\varphi_{m-t}\varphi_m}{\varphi_t(m-t)} - \sum_{\substack{m=1\\ m\neq t}}^{\infty}\frac{\varphi_{m+t}\varphi_m}{\varphi_t(m+t)}\right\}, \tag{32}$$

$$h_t = (-1)^t\frac{\partial}{\partial r_t}\left[(\Delta_2+\Delta_3+\cdots+\Delta_n)\sin^2\frac{\pi}{2}\sqrt{\varphi_0}\right]_{r_t=0}. \tag{33}$$

Решение уравнения (28) имеет вид

$$\varphi_{0t} = \sigma_{0t} + t^2 + \frac{2}{\pi^2}\frac{1-(-1)^t\cos k_z\pi}{1+F_t} \pm \\ \pm\frac{\Delta\varphi_t}{2}\sqrt{1+\frac{8}{\pi^2}\frac{\left(2t-\frac{K_t}{1+F_t}\right)^2[1-(-1)^t\cos k_z\pi]}{(\Delta\varphi_t)^2(1+F_t)}}, \tag{34}$$

где

$$\sigma_{0t} = \frac{|\varphi_t|^2\left(1-\frac{\varphi_{2t}}{12t}-\beta_t\right)}{4t^2(1+F_t)} - \frac{K_t}{2(1+F_t)}\left(2t - \frac{K_t}{1+F_t}\right), \tag{35}$$

$$\Delta\varphi_t = \left(2t - \frac{K_t}{1+F_t}\right)\left|\frac{K_t}{1+F_t}\right|\left[1 + \frac{|\varphi_t|^2\left(1-\frac{\varphi_{2t}}{12t}-\beta_t\right)(1+F_t)}{K_t^2 t^2}\right]^{1/2}, \tag{36}$$

$$\varphi_{0t} = \mathrm{E}_t\varkappa V_s^{-1}, \quad \Delta\varphi_t = \Delta\mathrm{E}_t\varkappa V_s^{-1}, \tag{37}$$

$\Delta\mathrm{E}_t$ — ширина t-запрещенной зоны, E_t — энергия электрона в t-разрешенной зоне.

Таким образом, энергетический спектр электрона (дырки) в поле ультразвуковой волны (УВ), связанный с движением электронов вдоль направления распространения УВ, носит зонный характер с законом дисперсии (34). Из (34) следует, что энергетический спектр электронов (дырок) представляет собой ряд чередующихся разрешенных и запрещенных зон, размеры и положения которых зависят от частоты и амплитуды ультразвука. Из (34) следует также, что экстремумы полученных зон находятся на краях или в центре зоны, что согласуется с выводами общего рассмотрения движения заряженной частицы в одномерном периодическом поле [6].

Из (34) и (37) видно, что с ростом номера зоны t ширина разрешенной зоны растет, а запрещенной — уменьшается, а увеличение частоты ультразвука приводит к уменьшению ширины запрещенной зоны и увеличению ширины разрешенной зоны.

3. Как легко видеть из (34), при условии

$$\left(2t-\frac{K_t}{1+F_t}\right)^2 \ll \frac{\pi^2}{8}(1+F_t)(\Delta\varphi_t)^2 \tag{38}$$

можно разложить корень в (34), и мы получаем хорошо известное выражение для закона дисперсии в приближении «сильной связи»

$$\varphi_{0t}=t^2+\sigma_{0t}+\left[1+\frac{\left(2t-\frac{K_t}{1+F_t}\right)^2}{\Delta\varphi_t(1+F_t)}\right]\frac{2}{\pi^2}[1-(-1)^t\cos k_z\pi]\pm\frac{\Delta\varphi_t}{2}, \tag{39}$$

где верхний знак соответствует зоне проводимости, а нижний — валентной.

4. В случае $k_z\pi<1$, когда в разложении $\cos k_z\pi$ можно ограничиться квадратичным членом, а амплитуда φ_t такова, что

$$\frac{8}{\pi^2}\frac{\left(2t-\frac{K_t}{1+F_t}\right)^2}{(\Delta\varphi_t)^2(1+F_t)}\gg 1, \tag{40}$$

мы получаем следующее выражение для закона дисперсии:

$$\varphi_{0t}=t^2+\sigma_{0t}+\frac{2k_z^2}{1+F_t}\pm\frac{\Delta\varphi_t}{2}\left[1+\frac{8\left(2t-\frac{K_t}{1+F_t}\right)^2 k_z^2}{(\Delta\varphi_t)^2(1+F_t)}\right]^{1/2}. \tag{41}$$

Выражение (41) подобно закону дисперсии, полученному Кейном [7] для зоны проводимости в двухзонном приближении. Такое совпадение связано с тем обстоятельством, что периодический потенциал в уравнении (5) представляется в виде разложения, содержащего высшие гармоники. Другими словами, вместо простой синусоидальной волны берется разложение Фурье. Легко заметить, что члены разложения определителя содержат произведения фурье-компонент различных индексов, т. е. фактически учитывается взаимодействие между различными зонами.

5. И, наконец, для $k_z\pi\ll 1$, когда справедливо разложение корня в (34) (амплитуды φ_t при этом любые), получаем обычный квадратичный закон дисперсии. Таким образом, независимо от величины периодического

потенциала зависимость $E_t(k_z)$ вблизи экстремальных точек — квадратичная. По мере удаления от этих точек происходит существенное отклонение от квадратичности.

6. Особый интерес представляет вычисление эффективной массы электрона (дырки) в такой энергетической структуре.

Согласно [8] обобщенная эффективная масса определяется так

$$\mu^* = \left(\frac{s}{\hbar\omega}\right)^2 \frac{\partial^2 E_t}{\partial k_z^2}. \tag{42}$$

Вычисление μ^* согласно (42) и (34) вблизи экстремальных точек дает следующий результат:

$$\mu^*_{\pm} = m^* \frac{1+F_t}{1 \pm \frac{\pi\hbar^2\omega^2}{4m^*s^2V_s}\left(2t - \frac{K_t}{1+F_t}\right)(1-4t^2)(1+F_t)^{1/2}\, t}. \tag{43}$$

Здесь положительный и отрицательный знаки относятся соответственно к зонам с более высокой и более низкой энергией, т. е. состояниям на противоположных сторонах «щели» будут соответствовать эффективные массы противоположных знаков. Этот результат хорошо известен в зонной теории полупроводников. Переброс электронов из зоны с отрицательной массой в зону с положительной массой создает электроны и дырки. С уменьшением ширины запрещенной зоны происходит уменьшение эффективных масс носителей тока примыкающих к этой запрещенной зоне разрешенных зон.

Оценки показывают, что в зависимости от параметров ω, V_s и t можно реализовать случай, когда $\mu^* \ll m^*$. Так, например, при $m \sim 10^{-29}$ *г*, $V_s \sim 10^{-15}$ *эрг*, $s \sim 10^5$ *см/сек* имеем

1) $\omega \sim 10^{10}$ $сек^{-1}$, $t = 1$, $\mu^*_+ \approx m^*/6$, $\mu^*_- \approx -m^*/4$,

2) $\omega \sim 2\cdot 10^{10}$ $сек^{-1}$, $t = 1$, $\mu^*_+ \approx m^*/20$, $\mu^*_- \approx -m^*/18$,

3) $\omega \sim 10^{10}$ $сек^{-1}$, $t = 2$, $\mu^*_+ \approx m^*/95$, $\mu^*_- \approx -m^*/93$.

Важным является еще тот факт, что параметрами зонной структуры (такими, как ширина запрещенной и разрешенной зон, эффективная масса, закон дисперсии) можно управлять, меняя частоту или амплитуду ультразвука.

Существование указанных зон реально в случае, когда длина волны ультразвука меньше длины свободного пробега l_0 электрона в исследуемом полупроводнике, т. е. $l_0 > \lambda_0$, а также когда размытие подзон из-за различных процессов столкновений мало по сравнению с шириной запрещенной зоны, т. е.

$$\Delta E_t > \frac{\hbar}{\tau},\ kT, \tag{44}$$

где τ — наименьшее из времен релаксации, T — температура.

Таким образом, энергетический спектр полупроводника при одновременном действии магнитного поля H и поля ультразвуковой волны имеет следующий вид:

$$E_{0l,\,l} = \hbar\Omega\left(l+\frac{1}{2}\right)+\frac{V_s}{\varkappa}t^2+\sigma_{0l}\frac{V_s}{\varkappa}+\frac{2}{\pi}V_s-\frac{m^*s^2}{2}+$$
$$+\frac{2}{\pi}\frac{V_s}{\varkappa}\frac{1-(-1)^t\cos k_z\pi}{1+F_t}\pm$$
$$\pm\frac{\Delta\varphi_t V_s}{2\varkappa}\sqrt{1+\frac{8}{\pi^2}\frac{V_s^2}{\varkappa^2}\frac{\left(2t-\frac{K_t}{1+F_t}\right)^2[1-(-1)^t\cos k_z\pi]}{\left(\frac{\Delta\varphi_t V_s}{\varkappa}\right)^2(1+F_t)}}. \quad (45)$$

Первый член выражения (45) соответствует квантованию движения электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, а остальные члены ответственны квантованию движения электрона вдоль поля ультразвуковой волны. Из (45) следует, что запрещенные зоны образуются около точек $\frac{V_s}{\varkappa}t^2$, ширины которых равны $\frac{V_s}{\varkappa}\Delta\varphi_t$; члены $\frac{V_s}{\varkappa}\sigma_{0t}+\frac{2}{\pi}V_s-\frac{m^*s^2}{2}$ определяют сдвиг краев невозмущенных зон, а два последних члена определяют размеры разрешенных подзон и зависимость энергии от квазиимпульса в этих зонах.

Таким образом, подбирая величины V_s, ω и H, мы можем удовлетворить условию запрета излучения фононов неравновесными электронами [2] и, следовательно, получить принципиальную возможность создания инверсной заселенности между магнитоакустическими подзонами.

7. Поскольку эффективные массы электронов и дырок в исходном полупроводнике сильно отличаются, возможна следующая ситуация: при одном и том же значении амплитуды V_s потолок валентной зоны сдвигается (так как $m_v \gg m_c$), а дно зоны проводимости не претерпевает существенного сдвига (сдвиг края зоны реален при условии $\varkappa>1$, так как только в этом случае связанное состояние носителя тока отстоит от поверхности ямы на заметную величину).

В этом случае при $\hbar\omega_0<\Delta$ (Δ — ширина невозмущенной запрещенной зоны исходного полупроводника, $\hbar\omega_0$ — энергия падающего кванта) энергия будет поглощаться из-за сужения оптической ширины запрещенной зоны (аналогичное явление наблюдается в сильно легированных полупроводниках). По величине сужения запрещенной зоны можно определить потенциал деформации.

Таким образом, проходящее через полупроводник оптическое излучение будет промодулировано по интенсивности при модуляции ω или V_s. Необходимо также отметить, что зонный спектр образуется при сколь угодно малой, но отличной от нуля величине V_s. При $\varkappa>1$ зоны образуются вследствие туннелирования электрона в соседние ямы, а при $\varkappa<1$ зонный спектр образуется из-за надбарьерного отражения электрона. Отметим также, что полученные результаты справедливы не только для периодической структуры, создаваемой ультразвуковой волной, но и для искусственных слоистых структур.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить И. А. Полуэктова за обсуждение результатов работы.

Приложение 1

Вычисление Δ_1.

$$\Delta_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi_m|^2}{4m(m^2-\varphi_0)}\left[\frac{2n-m}{4n^2-\varphi_0} - \frac{2n+3m}{4(n+m)^2-\varphi_0}\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{4\sqrt{\varphi_0}}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\varphi_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\varphi_m|^2}{m^2-\varphi_0}. \qquad (\Pi\ 1.1)$$

Используя выражение (13) для φ_m, получаем

$$\Delta_1 = -\left(\frac{2\varkappa}{\pi}\right)^2\frac{\pi}{4\sqrt{\varphi_0}}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\varphi_0}\left\{\frac{\pi^2-8}{4(1-4\varphi_0)} - \frac{2}{1-4\varphi_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-4\varphi_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi_0}} - \frac{\pi\operatorname{ctg}\pi\sqrt{\varphi_0}}{2\sqrt{\varphi_0}}\right)\right\}. \qquad (\Pi\ 1.2)$$

При вычислении сумм мы воспользовались соотношением [9]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-\varphi_0} = \frac{1}{2\varphi_0} - \frac{\pi}{4\sqrt{\varphi_0}}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\varphi_0}. \qquad (\Pi\ 1.3)$$

Вычисление Δ_2.

$$\Delta_2 = \frac{1}{3!}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0,\,-n}}^{\infty}\ \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\ \sum_{p=-\infty}^{\infty} I_{mnp}\,\varphi_m\varphi_n\varphi_{m+n}. \qquad (\Pi\ 1.4)$$

После некоторых преобразований для I_{mnp} получаем

$$I_{mnp} = \frac{1}{(4p^2-\varphi_0)(4(n+p)^2-\varphi_0)(4(n+p+m)^2-\varphi_0)} =$$

$$= -\frac{1}{4n(n^2-\varphi_0)}\left[\frac{2p-n}{4p^2-\varphi_0} - \frac{2p+3n}{4(n+p)^2-\varphi_0}\right]\frac{1}{4(n+p+m)^2-\varphi_0} = \qquad (\Pi\ 1.5)$$

$$= \frac{1}{4n(n^2-\varphi_0)}\left[\frac{2n+m}{(m+n)^2-\varphi_0} + \frac{n+m}{m^2-\varphi_0}\right]\frac{1}{4p^2-\varphi_0}.$$

После суммирования по p с использованием (П 1.3) находим

$$\Delta_2 = -\frac{\pi}{3!}\,\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\varphi_0}}{8\sqrt{\varphi_0}}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0,\,n}}^{\infty}\ \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\varphi_m\varphi_n\varphi_{m-n}(m+n)}{n(n^2-\varphi_0)(m^2-\varphi_0)}. \qquad (\Pi\ 1.6)$$

$$\Delta_3 = -\frac{3}{4!}\Bigg[2\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0,\,-q}}^{\infty}\ \sum_{\substack{l=-\infty\\ l\neq 0,\,-q}}^{\infty}\ \sum_{p=-\infty}^{\infty} I_{lqk}\varphi_k\varphi_l\varphi_{k+q}\varphi_{l+q} -$$

$$-\sum_{\substack{t=-\infty\\ t\neq 0}}^{\infty}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\ \sum_{\substack{l=-\infty\\ l\neq 0}}^{\infty}\ \sum_{p=-\infty}^{\infty}\times \tag{П 1.7}$$

$$\times\frac{|\varphi_t|^2\,|\varphi_l|^2}{[4(t+n)^2-\varphi_0][4n^2-\varphi_0][4(l+p)^2-\varphi_0][4p^2-\varphi_0]}\Bigg],$$

где

$$J_{lqk} = -\frac{1}{32\,q(l-k)(q^2-k^2)[(l-k)^2-\varphi_0]}\Bigg\{\Bigg[-\frac{1}{k^2-\varphi_0}+\frac{1}{l^2-\varphi_0}+$$

$$+\frac{1}{(q+k)^2-\varphi_0}-\frac{1}{(q+l)^2-\varphi_0}\Bigg]-$$

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{\varphi_0}}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\varphi_0}\Bigg[\frac{-\varphi_0-ql-k^2+kl+2qk}{k^2-\varphi_0}+\frac{\varphi_0-2lq+qk-lk+l^2}{l^2-\varphi_0}-$$

$$-\frac{\varphi_0+2ql+kl-3qk-k^2-q^2}{(q+k)^2-\varphi_0}+\frac{\varphi_0+2qk-3ql-q^2-l^2+kl}{(q+l)^2-\varphi_0}\Bigg]\Bigg\}. \tag{П 1.8}$$

Приложение 2

Вычисление волновых функций.

Коэффициенты $T_{k_z n}$ из (10) могут быть выражены через миноры определителя (15)

$$\Delta(k_z,\ \varphi_0) = \det|D_{mn}|,\ D_{mm}=1,\ D_{mn}=\frac{\varphi_{m-n}}{(k_z+2m)^2-\varphi_0},\ m\neq n,$$

$$m,\ n = -\infty,\cdots,\ 0,\ \cdots,\ +\infty. \tag{П 2.1}$$

Вычисление определителя проводится тем же путем, что и в тексте; отличие состоит в том, что в определителе при вычислении $T_{k_z n}$ будут отсутствовать члены, соответствующие пересечению нулевой строки (разложение определителя проводится по нулевой строке) и p-столбца. Здесь мы выписываем члены с точностью до второго порядка включительно.

$$\Delta_{0p} = 1-\frac{1}{2!}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0,\ n}}^{\infty}\ \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq p}}^{\infty}\frac{\varphi_{m-n}\varphi_{n-m}}{[(k_z+2m)^2-\varphi_0][(k_z+2n)^2-\varphi_0]}. \tag{П 2.2}$$

После суммирования по индексу m и некоторых преобразований получаем

$$\Delta_{0p} = \left[1 - \frac{\pi}{8\sqrt{\varphi_0}} \, \frac{\sin \pi \sqrt{\varphi_0}}{\sin^2 \frac{\pi k_z}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2}\sqrt{\varphi_0}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{|\varphi_t|^2}{t^2 - \varphi_0} \right] +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} \, \frac{1}{(k_z + 2p)^2 - \varphi_0} \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \neq 0}}^{\infty} \frac{|\varphi_t|^2}{(k_z + 2p + 2t)^2 - \varphi_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2(k_z^2 - \varphi_0)} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq p}}^{\infty} \frac{|\varphi_n|^2}{(k_z + 2n)^2 - \varphi_0} \right\}. \qquad (\Pi\ 2.3)$$

Согласно (24) выражение в квадратной скобке с точностью до квадратичных членов равен нулю.

Таким образом,

$$W(\xi) = M(k_z, \varphi_0)\, e^{ik_z\xi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Delta_{0p}\, e^{i2\pi p\xi}, \qquad (\Pi\ 2.4)$$

где $M(k_z, \varphi_0)$ определяется из условия нормировки.

Институт радиофизики и электроники
АН АрмССР

Поступила 25.I.1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. G. Aleksanian, I. A. Poluectov, Yu. M. Popov*. IEEE, QE, 10, 297 (1974).
2. *И. А. Полуэктов, В. И. Пустовойт*. Препринт ФИАН, Москва, 1967. *А. Г. Алексанян, Р. Г. Аллахвердян, Ал. Г. Алексанян*. Квантовая электроника, 2, 1648 (1975).
3. *И. А. Полуэктов, Ю. М. Попов*. ФТТ, 8, 345 (1966).
4. *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон*. Курс современного анализа, М., 1963.
5. *В. И. Смирнов*. Курс высшей математики, т. III, часть I, 1950.
6. *Г. Джонс*. Теория зон Бриллюэна и электронные состояния в кристаллах, М., 1968.
7. *E. O. Kane*. J. Phys. Chem. Solids, 1, 249 (1957).
8. *Дж. Калуэй*. Теория энергетической зонной структуры, М., 1969.
9. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1971.

ՈՒԼՏՐԱՁԱՅՆԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ԴԱՇՏՈՒՄ ԵՎ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՏԵՂԱԴՐՎԱԾ ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴՉԻ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՍՊԵԿՏՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա. Գ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ, Է. Գ. ՄԻՐՁԱԲԵԿՅԱՆ

Հետազոտված է մագնիսական և ուլտրաձայնային ալիքի դաշտերում տեղադրված կիսահաղորդչի էներգետիկ սպեկտրը։ Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ ալիքային ֆունկցիայի դիսպերսիայի օրենքի, էֆեկտիվ մասսայի, արգելված և թույլատրված գոտիների լայնությունների համար։

TO THE THEORY OF ELECTRON SPECTRUM OF A SEMICONDUCTOR IN A MAGNETIC FIELD AND IN AN ULTRASONIC WAVE FIELD

A. G. ALEKSANYAN, E. G. MIRZABEKYAN

The energy spectrum of a semiconductor in a magnetic field and in an ultrasonic wave field is investigated. The analytical expressions for the law of dispersion, the effective mass and the wave function are obta ined.