

О ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ РАССЕЯНИИ
И ПРИСУЩЕМ ЕМУ ХАРАКТЕРЕ ДИФРАКЦИИ

А. Н. КОВАЛЬ

Используя принцип Гюйгенса, формулируются условия высокоэнергетического рассеяния и находится класс функций Грина в этом пределе. Показывается, что он совпадает с функцией Грина дифракции Френеля. Различные предельные случаи (геометрическая оптика, дифракция Френеля или Фраунгофера) следуют из последней путем вариации параметра ξ ($\xi = a_{\parallel}/ka^2_{\perp}$).

В связи с последними достижениями ядерной оптики [1] многие классические вопросы теории распространения волн вновь приобрели актуальное значение. При этом происходит пересмотр этих задач с современных позиций. Мы попытаемся связать высокоэнергетические процессы рассеяния с характером дифракции, присущим им. Качественно эта задача была решена в работе [2]. В настоящей работе мы дадим полное решение задачи. Отметим, что наиболее удобным является язык функций Грина. Тип дифракции удобно характеризовать параметром ξ ($\xi = \frac{z}{ka^2}$), сопоставив ему некоторую функцию размазки по прицельным параметрам $\delta(\mathbf{b}, k, \xi)$, которая связана с функцией Грина

$$G^0(\mathbf{r}) \sim \delta(\mathbf{b}, k, \xi). \quad (1)$$

Задание параметра ξ и функции $\delta(\mathbf{b}, k, \xi)$ полностью определяет характер дифракции и количественные соотношения, соответствующие ей. Для решения задачи воспользуемся принципом Гюйгенса в классической формулировке.

Пусть имеется источник волны с импульсом k , помещенный в точке $\mathbf{r}_1$. Согласно принципу Гюйгенса, амплитуду волны из точки $\mathbf{r}_1$ в $\mathbf{r}_2$ можно представить как суперпозицию вторичных волн до точки $\mathbf{r}_2$ от некоторой поверхности S , разделяющей $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, с учетом запаздывания распространения волн от $\mathbf{r}_1$ до S .

Для математической формулировки принципа Гюйгенса воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса

$$\int_{V_0} \operatorname{div} \mathbf{A} d\mathbf{r} = \int_S (\mathbf{A} d\mathbf{s}), \quad (2)$$

где через $\mathbf{A}$ обозначен вектор Грина

$$\mathbf{A} = f \nabla g - g \nabla f, \quad f = G^0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}), \quad g = G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1). \quad (3)$$

Объем V_0 выберем в виде половины шара радиуса R с выколотой точкой $\mathbf{r}_1$. Расположение точек $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ показано на рис. 1.



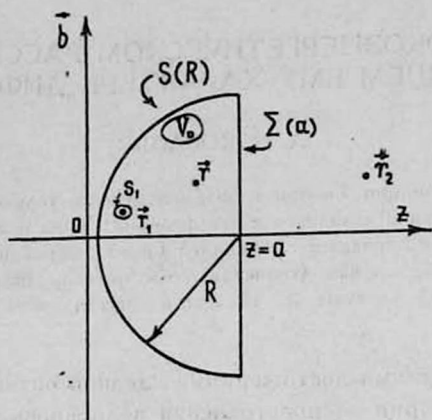


Рис. 1.

Функция Грина $G^0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2)G^0(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Пользуясь уравнением (4), после вычисления объемного и поверхностного интегралов в (2) получим

$$G^0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \int_{S-S_1} (\mathbf{A} \, ds). \quad (5)$$

Легко показать, что вклад от поверхности $S(R)$ при $R \rightarrow \infty$ равен нулю, так что

$$G^0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \int_{\Sigma(a)} A_z \, d^2b. \quad (6)$$

Представление (6) есть принцип Гюйгенса в классической формулировке. Хотя функция Грина $G^0(\mathbf{r})$ полностью определяется уравнением (4), представляется важным связать принцип Гюйгенса в форме (5) или (6) с условиями высокоэнергетического рассеяния и функцией Грина в этом пределе.

Представление (6) верно при любых импульсах испущенных волн. Исследуем его для случая высоких энергий. Отметим, что уравнения (4) или (6) не содержат в явном виде масштаба импульсов, относительно которого можно сформулировать высокоэнергетическое поведение. Указанный масштаб определим следующим образом. Введем в объем V_0 пробное тело с характерными продольным и поперечным размерами $a_{\parallel}$ и $a_{\perp}$. Определим условия, при которых рассеяние испущенной волны на пробном теле следует считать высокоэнергетическим, а затем уберем пробное тело из объема V_0 . Если на пробное тело налетает сферическая волна с импульсом k , то в результате рассеяния импульс частицы изменяется на величину порядка

$$|q_{\perp}| \sim \frac{1}{a_{\perp}}, |q_{\parallel}| \sim \frac{1}{a_{\parallel}}. \quad (7)$$

Наложим на процесс рассеяния следующие ограничения:

1) условие рассеяния вперед

$$k \gg |q_{\parallel}| \text{ или } ka_{\parallel} \gg 1; \quad (8)$$

2) условие существования дифракционного конуса

$$k \gg |q_{\perp}| \text{ или } ka_{\perp} \gg 1. \quad (9)$$

Задав параметры $a_{\parallel}$ и $a_{\perp}$, мы тем самым выбрали масштаб, в котором можно измерить импульс k . Таким образом, мы имеем три размерных параметра k , $a_{\parallel}$ и $a_{\perp}$, на которые наложены два условия (8) и (9). Остаточный произвол можно зафиксировать, введя безразмерную переменную $\xi = a_{\parallel}/ka_{\perp}$, значение которой определяет тип дифракции (в случае геометрической оптики $\xi \ll 1$, для дифракции Френеля $\xi \lesssim 1$, а для дифракции Фраунгофера $\xi \gg 1$) [2].

Перейдем к упрощению (6). В пренебрежении величинами порядка $(ka_{\parallel})^{-1} \ll 1$ ($a_{\parallel} \sim z_1$) в (6) следует ограничиться членами, пропорциональными производной от фазы функции Грина. В результате получим

$$G^0(r_2 - r_1) = ik \int_{\Sigma(a)} G^0(r_2 - r) G^0(r - r_1) \left\{ \frac{z_2 - z}{|r_2 - r|} + \frac{z - z_1}{|r - r_1|} \right\} d^2b. \quad (10)$$

Найдем область прицельных параметров, существенных при интегрировании в (10) (следует помнить, что размер этой области не ограничивается характерным поперечным расстоянием). Для простоты поместим плоскость $\Sigma(a)$ в начале координат. Легко видеть, что сферические волны, испущенные из точек O и O' , разделенных расстоянием b , будут когерентны в точке z_2 , если разность хода z_1O и z_1O' , а также Oz_2 и $O'z_2$ будет порядка длины волны λ (рис. 2),

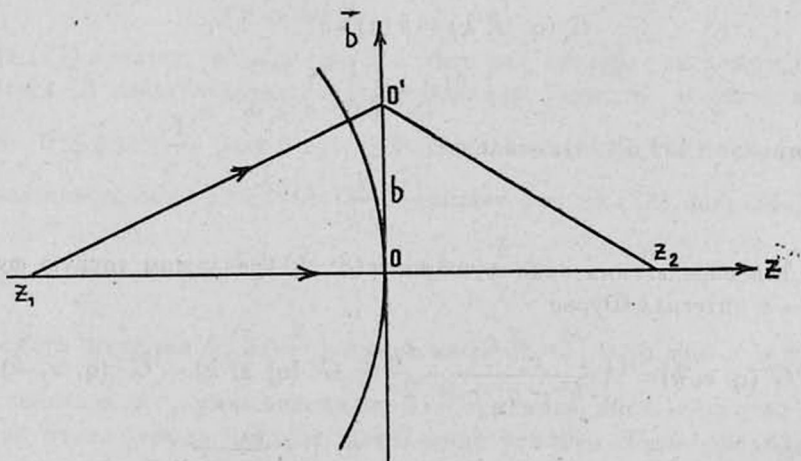


Рис. 2.

$$\sqrt{z_l^2 + b^2} - z_l \sim \lambda.$$

Отсюда

$$b \sim \sqrt{2 z_l \lambda + \lambda^2}$$

и с помощью (8) находим

$$bk \sim \sqrt{z_l k} \sim \sqrt{a_1 k} \gg 1 \quad (bk \neq a_{\perp} k),$$

$$\frac{b^2}{z_l \lambda} \sim 1, \quad \frac{\lambda}{z_l} \ll 1,$$

иначе говоря,

$$\frac{b^2}{z_l^2} \ll 1. \quad (11)$$

Используя (11), получим принцип Гюйгенса в эвристической формулировке (см. также [3, 4])

$$G^0(r_2 - r_1) = 2ik \int_{\Sigma(a)} G^0(r_2 - r) G^0(r - r_1) d^2b. \quad (12)$$

Рассматривая (12) как уравнение, найдем функции Грина при условиях (8) и (9). Для его решения разложим $G^0(r)$ в двумерный интеграл Фурье

$$G^0(r) = \int e^{iqb} G_1(q, z, k) \frac{d^2q}{(2\pi)^2}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), для $G_1(q, z, k)$ получим мультипликативное уравнение

$$G_1(q, z_2 - z_1, k) = 2ik G_1(q, z_2 - z, k) G_1(q, z - z_1, k), \quad (14)$$

$$z_2 > z > z_1.$$

Решением (12), очевидно, будет

$$G_1(q, z, k) = \theta(z) \alpha e^{i\varphi(q^2, k)z}, \quad (15)$$

где

$$\theta(z) = \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0. \end{cases}$$

Подставляя (15) в (14), найдем

$$\alpha = -\frac{i}{2k}. \quad (16)$$

Для определения вида функции $\varphi(q^2, k)$ разложим точную функцию Грина в интеграл Фурье

$$G^0(q, z, k) = \int \frac{e^{iq_z z}}{k^2 - q^2 + i\epsilon} \frac{dq_z}{2\pi} = G^+(q, z, k) + G^-(q, z, k), \quad (17)$$

где

$$G^{\pm} = \theta(\pm z) \frac{-i}{2\sqrt{k^2 - q^2}} e^{i\sqrt{k^2 - q^2}|z|}, \quad (18)$$

откуда следует, что G_1 совпадает с G^+ при условии, что

$$\varphi(q^2, k) = \sqrt{k^2 - q^2}, \quad \frac{q^2}{k^2} \ll 1. \quad (19)$$

С помощью (19) получим окончательно

$$G^0(r) = -\frac{i}{2k} \theta(z) \delta(\mathbf{b}, k, z) e^{ikz}, \quad (20)$$

где через $\delta(\mathbf{b}, k, z)$ обозначена функция

$$\delta(\mathbf{b}, k, z) = \int e^{iq_{\perp} \mathbf{b} + iz(\sqrt{k^2 - q_{\perp}^2} - k)} \frac{d^2 q_{\perp}}{(2\pi)^2}. \quad (21)$$

Перейдем к исследованию представления (20). Покажем первоначально, что представление (20) совместимо с условиями (8)–(9). Условие $kz \gg 1$ эквивалентно в (17) условию $\frac{q_z - k}{k} \ll 1$, что имеет место, так как вклад в G^+ возникает от полюса при $q_z = k$. Условие $q^2/k^2 \ll 1$ означает, что если в задаче имеется характерное поперечное расстояние $a_{\perp}$, то $q_{\perp} \sim \frac{1}{a_{\perp}}$ и (19) эквивалентно $ka_{\perp} \gg 1$.

Интегрируя в (21) по полярному углу и введя переменную $\xi_1 = \frac{q^2 z}{k}$, получим

$$\delta(\mathbf{b}, k, z) = \frac{k}{4\pi z} \int_0^{+\infty} J_0\left(\sqrt{\frac{\xi_1}{\xi'}}\right) e^{-i \frac{\xi_1}{1 + \sqrt{1 - \frac{\xi_1}{kz}}}} d\xi_1, \quad (22)$$

где

$$\xi' = \frac{z}{kb^2}, \quad \xi = \frac{z}{ka_{\perp}^2}.$$

Из (21) следует, что при $q_{\perp} > k$ интеграл начинает экспоненциально зарезаться. В действительности существенная область изменения $q_{\perp}$ меньше: $0 \leq q_{\perp} \leq \frac{1}{a_{\perp}}$ (или $0 \leq \xi_1 \leq \xi$). Экспонента в (22) не будет сильно меняться при условии $\xi_1 \leq 2$ ($kz \gg 1$), при котором из (22) получаем

$$\delta(\mathbf{b}, k, z) = \delta\left(\mathbf{b}, \frac{k}{z}\right). \quad (23)$$

Из свойств функции $\delta\left(\mathbf{b}, \frac{k}{z}\right)$ известно [2, 5–7], что при $z \rightarrow \infty$ она ведет себя как z^{-1} , умноженная на слабо меняющийся множитель, зависящий от z , откуда следует выполнение условия Зоммерфельда.

Таким образом, значения ξ_1 , существенные в интеграле (22), ограничены условиями

$$0 \leq \xi_1 \leq \xi, \quad \xi_1 \leq 2, \quad \xi_1 \leq \xi'.$$

(24)

В частности, при $\xi \gg \xi'$ величина размазки по прицельным параметрам не будет зависеть от размера возмущающего объекта.

Результат (23) означает, что при высоких энергиях функция размазки $\delta(b, k, z)$ совпадает с функцией дифракции Френеля, и различные предельные случаи (геометрическая оптика, дифракция Френеля или Фраунгофера) будут следовать из последней путем вариации параметра ξ .

В заключение выражаю глубокую благодарность И. В. Андрееву, С. Г. Матияну и Е. А. Фейнбергу за полезные обсуждения.

Ереванский физический
институт

Поступила 25.III.1973

ЛИТЕРАТУРА

1. R. I. Glauber. Boulder Lecture in Theoretical Physics, 1, 1958.
2. Л. Н. Коваль, С. Г. Матиян. ЯФ, 19, 380 (1974).
3. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 24, 505 (1953).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, Изд. Наука, 1973.
5. K. Gottfried. Ann. Phys., 66, 858 (1971).
6. Е. А. Фейнберг. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, Изд. АН СССР, 1961.
7. W. E. Frahn, B. Shurmann. Ann. Phys., 84, 147 (1974).

ԲԱՐՁՐ ԷՆԵՐԳԻԱՆԵՐԻ ԴԵՊՓՈՒՄ ՑՐՄԱՆ ԵՎ ՆՐԱՆ ԲՆՈՐՈՇ ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ն. ԿՈՎԱԼ

Օգտվելով Հյուգենսի սկզբունքից ձևակերպված են բարձր էներգիաների դեպքում ցրման պայմանները, գտնված է Գրինի ֆունկցիաների դասը: Ցույց է տրված, որ այդ դասը համընկնում է Ֆրենելի դիֆրակցիայի Գրինի ֆունկցիայի հետ: Այս վերջինից՝ ξ ($\xi = a_{\parallel}/ka_{\perp}^2$) պարամետրի վարիացիայի հետևանքով ստացվում են տարբեր սահմանային դեպքեր (երկրաչափական օպտիկա, Ֆրենելի կամ Ֆրաունգոֆերի դիֆրակցիա):

ON HIGH-ENERGY SCATTERING AND ITS INHERENT DIFFRACTION CHARACTER

L. N. KOVAL'

Starting from Huygens principle the conditions of high-energy scattering are formulated ($ka_{\parallel} \gg 1$, $ka_{\perp} \gg 1$). It is shown that the set of Green's functions in this case is identical with the set of Green's functions of Fresnel diffraction. The different limiting cases (such as geometrical optics, the Fresnel or Fraunhofer diffraction) can be received by the variation of parameter ξ ($\xi = \frac{a_{\parallel}}{ka_{\perp}^2}$).