

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В СРЕДАХ СО СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ, ОБЛАДАЮЩИХ СЛОИСТОСТЬЮ

О. С. ЕРИЦЯН

Рассмотрено распространение электромагнитной волны в среде, обладающей двумя типами периодической неоднородности — спиральностью и слоистостью. Пример такой среды — холестерический жидкий кристалл в гиперзвуковом поле [1]. Выяснены характерные особенности распространения волн в таких средах.

1. Точное решение дисперсионного уравнения при распространении волн вдоль оси спиральности в отсутствии слоистости

Направим ось z вдоль оси спиральной структуры. Выберем новую систему координат x', y', z' следующим образом: оси z и z' совпадают, а оси x' и y' с изменением координаты z поворачиваются вокруг z , совпадая при каждом значении z с главными направлениями тензора диэлектрической проницаемости. Если при $z = z' = 0$ оси x, x' и y, y' попарно совпадают, то на расстоянии z от начала координат пара осей x', y' будет повернута относительно пары осей x, y на угол

$$\vartheta = \frac{2\pi}{\sigma} z = \alpha z, \quad (1)$$

где σ — шаг спирали.

Перейдя в волновом уравнении из лабораторной системы к системе x', y', z' , в случае распространения волн вдоль оси z получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_x - k^2 - \alpha^2 \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_y - k^2 - \alpha^2 \right) - 4\alpha^2 k^2 = 0, \quad (2)$$

где ω — частота волны, $k = \frac{2\pi}{\lambda'}$, λ' — пространственный период поля волны в системе x', y', z' ; ε_x и ε_y — главные значения тензора диэлектрической проницаемости в плоскости xy .

Уравнение (2) — биквадратное относительно k . В соответствии с наличием у него четырех корней точное решение волнового уравнения представится в виде

$$E'(z, t) = \sum_{m=1}^4 E'_m \exp i(k_m z - \omega t), \quad (3)$$

где k_m — корни уравнения (2), которые есть

$$k_{1,2} = \left[\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \alpha^2 \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + 4\alpha^2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

$$k_3 = -k_1, \quad k_4 = -k_2$$

(индексу 1 соответствует верхний знак перед корнем, индексу 2 — нижний). Между компонентами полей имеют место соотношения

$$E'_{my} = i \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_x - k_m^2 - a^2 \right) (2 a k_m)^{-1} E'_{mx}. \quad (5)$$

Оптические свойства среды при распространении волн вдоль оси z характеризуются формулами (3) — (5). Из (5) следует наличие частотной области (для определенности считаем $\varepsilon_x < \varepsilon_y$)

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_x \leq a^2 \leq \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_y, \quad (6)$$

в которой $k_m^2 \leq 0$; последним неравенством объясняется сильная отражательная способность холестерических жидких кристаллов в указанной частотной области. Из (4) и (5) следуют также поляризационные свойства. В частности, на нижней и верхней границах области (6) (для волн с $m=2$ и $m=4$) соответственно имеют место соотношения $E'_{my} = 0$ и $E'_{mx} = 0$, т. е. направление электрического поля при любом z совпадает с одним из главных направлений тензора диэлектрической проницаемости, а $[E_m H_m] = 0$.

2. Учет слоистости в одноволновом приближении

Пусть теперь в спиральной среде создана также слоистость, причем слои перпендикулярны к оси z . Особенности сред, обусловленные совместным наличием спиральности и слоистости, рассмотрим в наиболее простом случае, когда волна распространяется вдоль оси z , а ε_x , ε_y и a могут быть представлены в виде

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + \varepsilon_{1x} \cos bz, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{0y} + \varepsilon_{1y} \cos bz, \quad a = a_0 + a_1 \cos bz, \quad (7)$$

$$\left| \frac{\varepsilon_{1x}}{\varepsilon_{0x}} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\varepsilon_{1y}}{\varepsilon_{0y}} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \ll 1.$$

Из-за наличия слоистости каждая из волн (3) будет возбуждать новые пространственные гармоники. Представив поле в виде

$$E'(z, t) = \sum_{m=1}^4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E'_{mn} \exp i(k_{mn} z - \omega t) \quad (8)$$

и пользуясь выражениями (7), из волнового уравнения получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{mn}^{(x)} E'_{mnx} + 2 i a_0 k_{mn} E'_{mny} = & \left(a_0 a_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{1x}}{2} \right) (E'_{m, n-1x} + \\ & + E'_{m, n+1x}) - i a_1 (k_{m, n-1} E'_{m, n-1y} + k_{m, n+1} E'_{m, n+1y}) - \frac{i a_1 b}{2} (E'_{m, n-1y} - \\ & - E'_{m, n+1y}) + \frac{1}{4} a_1^2 (E'_{m, n-2x} - E'_{m, n+2x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{mn}^{(y)} E'_{mny} - 2ia_0 k_{mn} E'_{mnx} = (a_0 a_1 - \\ - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{1y}}{2}) (E'_{m, n-1y} + E'_{m, n+1y}) + ia_1 (k_{m, n-1} E'_{m, n-1x} + \\ + k_{m, n+1} E'_{m, n+1x}) + \frac{ia_1 b}{2} (E'_{m, n-1x} - E'_{m, n+1x}) + \\ + \frac{1}{4} a_1^2 (E'_{m, n-2y} + E'_{m, n+2y}), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} k_{mn} &= k_{m0} + nb, \\ \tilde{\rho}_{mn}^{(x)} &= \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}_{0x} - k_{mn}^2 - a_0^2, \quad \tilde{\varepsilon}_{0x} = \varepsilon_{0x} - \frac{c^2}{\omega^2} \frac{a_1^2}{4}, \\ \tilde{\rho}_{mn}^{(y)} &= \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}_{0y} - k_{mn}^2 - a_0^2, \quad \tilde{\varepsilon}_{0y} = \varepsilon_{0y} - \frac{c^2}{\omega^2} \frac{a_1^2}{4}. \end{aligned} \quad (10)$$

В нулевом приближении, сохраняя лишь амплитуды E'_{m0} , для k_{m0} получаем уравнение

$$\tilde{\rho}_{m0}^{(x)} \tilde{\rho}_{m0}^{(y)} - 4a_0^2 k_{m0}^2 = 0. \quad (11)$$

Слоистость в уравнении (11) выражается не только в наличии новой периодичности (ε_{1x} , ε_{1y} и b отличны от нуля), но также и в периодическом изменении имевшейся спиральности ($a_1 \neq 0$).

В первом приближении должны быть определены компоненты E'_{mnx} и E'_{mny} с $n = \pm 1, \pm 2$. Для них получаем выражения следующего вида:

$$\begin{aligned} E'_{mnx} &= (A_{mnx} E'_{m0x} + B_{mnx} E'_{m0y}) \Delta_{mn}^{-1}, \\ E'_{mny} &= (A_{mny} E'_{m0x} + B_{mny} E'_{m0y}) \Delta_{mn}^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

где Δ_{mn} получаются из левой части (11) заменой $k_{m0} \rightarrow k_{mn}$.

Как следует из (9) и (12), вследствие модуляции шага спирали волна с амплитудой E'_{m0} в первом приближении возбуждает не только гармоники $E'_{m, \pm 1}$, но и гармоники $E'_{m, \pm 2}$ (при $a_1 = 0$ последние в первом приближении не возбуждаются).

Выражения (12) справедливы при соблюдении условий

$$|A_{mnx, y} \cdot \Delta_{mn}^{-1}| \ll 1, \quad |B_{mnx, y} \cdot \Delta_{mn}^{-1}| \ll 1.$$

Не выписывая в явном виде выражения числителей A_{mnx} , A_{mny} , B_{mnx} , B_{mny} (они непосредственно определяются из (9)), укажем, что эти неравенства заведомо нарушаются, если $k_{m0}^2 = k_{mn}^2$, так как при этом знаменатели Δ_{mn} обращаются в нуль. Последние равенства приводят к следующим соотношениям:

$$k_{m0}^2 = \frac{b^2}{4} \quad \text{при} \quad n = \pm 1, \quad k_{m0}^2 = \frac{b^2}{16} \quad \text{при} \quad n = \pm 2, \quad (13)$$

которые определяют те частоты, в окрестности которых одноволновое приближение неприменимо.

Остановимся на случаях $n = \pm 1$ (случаи $n = \pm 2$ рассматриваются аналогично). Для k_{m0} получаем: $k_{m0} = \frac{b}{2}$ и $k_{m0} = -\frac{b}{2}$. Заме-

тим, что уравнение (11) совпадает с (2) при замене $\tilde{\epsilon}_{0x, y} \rightarrow \epsilon_{0x, y}$, поэтому k_{m0} будут равны k_m , если в (4) заменить $\tilde{\epsilon}_x$ на $\tilde{\epsilon}_{0x}$ и $\tilde{\epsilon}_y$ на $\tilde{\epsilon}_{0y}$.

Рассмотрим сначала соотношение $k_{m0} = \frac{b}{2}$. Так как $b > 0$, то последнее равенство может иметь место лишь при $m = 1$ и $m = 2$. Пренебрегая величиной $(\epsilon_{0x} - \epsilon_{0y})(\epsilon_{0x} + \epsilon_{0y})^{-1}$ по сравнению с единицей, получаем следующие выражения для частот $\omega_{\alpha\beta}$, удовлетворяющих условию $k_{m0} = \frac{b}{2}$, содержащие оба периода среды,

$$\omega_{\alpha\beta} c^{-1} \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_{0x} + \tilde{\epsilon}_{0y}}{2}} \approx \left| a \pm \frac{b}{2} \right|. \quad (14)$$

При этом, если $b < 2a$, то для обеих частот $m = 2$; если же $b > 2a$, то для меньшей частоты $m = 1$, а для большей — $m = 2$.

Таким образом, получаем следующий результат. а) При $b = 0$ имеется одна область брэгговского отражения в окрестности частоты $\frac{\omega_1}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_{0x} + \epsilon_{0y}}{2}} = a$ (см. (6)) для волны с $m = 2$. б) При $0 \neq \frac{b}{2} < a$ имеются три области для той же волны — на частотах ω_1 , ω_α и ω_β . в) Если $\frac{b}{2} > a$, то та же волна испытывает брэгговское отражение на частотах ω_1 и ω_α ($\omega_\alpha > \omega_\beta$), а волна с $m = 1$, которая в предыдущих случаях не испытывала брэгговского отражения, испытывает его на частоте ω_β . Как увидим ниже, положение границ области (6) также определяется обоими периодами. Эти свойства среды приводят к возможности модуляции поляризации и интенсивности волн и модуляции спектральной пропускности.

3. Учет слоистости в двухволновом приближении

Как было показано выше, при соблюдении равенства

$$k_{m0} = \frac{b}{2} \quad (m = 1, 2)$$

условие малости амплитуды E'_{m1} нарушается, и на частотах, близких к $\omega_{\alpha\beta}$, вместе с амплитудами E'_{m0} в нулевом приближении мы должны учесть в (9) и амплитуды $E'_{m, -1}$. При $m = 3, 4$ (обратные волны) вблизи тех же частот вместе с амплитудами E'_{m0} должны быть учтены и амплитуды $E'_{m, +1}$.

Учитывая в формулах (9) волны с амплитудами E'_{m0} и $E'_{m, -1}$, приходим к следующему дисперсионному уравнению в двухволновом приближении:

$$(\beta_{m0}^{(x)} \beta_{m0}^{(y)} - 4 a_0^2 k_{m0}^2) (\beta_{m, -1}^{(x)} \beta_{m, -1}^{(y)} - 4 a_0^2 k_{m, -1}^2) + F = 0, \quad (15)$$

где

$$F = f + \varphi + \psi,$$

$$f = -\alpha_y^2 \tilde{\beta}_{m0}^{(x)} \tilde{\beta}_{m, -1}^{(x)} - \alpha_x^2 \tilde{\beta}_{m0}^{(y)} \tilde{\beta}_{m, -1}^{(y)} - 8 \alpha_x \alpha_y k_{m0} k_{m, -1} + \alpha_x^2 \alpha_y^2,$$

$$\begin{aligned} \psi = & \alpha_1^4 \left(k_{m0} - \frac{b}{2} \right)^4 - \alpha_1^2 \left(k_{m0} - \frac{b}{2} \right)^2 (\tilde{\beta}_{m0}^{(x)} \tilde{\beta}_{m, -1}^{(y)} + \tilde{\beta}_{m, -1}^{(x)} \tilde{\beta}_{m0}^{(y)} + \alpha_x \alpha_y) + \\ & + 2 \alpha_1 \left(k_{m0} - \frac{b}{2} \right) (2 \alpha_y \tilde{\beta}_{m0}^{(x)} a_0 k_{m, -1} + 2 \alpha_x \tilde{\beta}_{m, -1}^{(y)} a_0 k_{m0} + \\ & + \alpha_y \tilde{\beta}_{m0}^{(x)} a_0 k_{m0} + \alpha_x \tilde{\beta}_{m, -1}^{(y)} a_0 k_{m, -1}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \left[\frac{\alpha_1^4}{4} - \frac{\alpha_1^2}{2} (\beta_{m, -1}^{(x)} + \beta_{m, -1}^{(y)}) \right] [\beta_{m0}^{(x)} \beta_{m0}^{(y)} - 4 a_0^2 k_{m0}^2] + \\ & + \left[\frac{\alpha_1^4}{4} - \frac{\alpha_1^2}{2} (\beta_{m0}^{(x)} + \beta_{m0}^{(y)}) \right] [\beta_{m, -1}^{(x)} \beta_{m, -1}^{(y)} - 4 a_0^2 k_{m, -1}^2] + \\ & + \left[\frac{\alpha_1^4}{4} - \frac{\alpha_1^2}{2} (\beta_{m0}^{(x)} + \beta_{m0}^{(y)}) \right] \left[\frac{\alpha_1^4}{4} - \frac{\alpha_1^2}{2} (\beta_{m, -1}^{(x)} + \beta_{m, -1}^{(y)}) \right], \\ & \alpha_{x, y} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1x, y} - a_0 a_1, \end{aligned} \quad (17)$$

а $\beta_{mn}^{(x)}$ и $\beta_{mn}^{(y)}$ получаются из $\tilde{\beta}_{mn}^{(x)}$ и $\tilde{\beta}_{mn}^{(y)}$ заменой $\tilde{\varepsilon}_{0x, y} \rightarrow \varepsilon_{0x, y}$.

При $\varepsilon_{1x} = \varepsilon_{1y} = a_1 = 0$ имеем $F = 0$, и уравнение (15), естественно, совпадает с (2). В отличие от уравнения (2), которое при $k_m = 0$ для граничных частот области (6) дает значения

$$\omega_1^2 \varepsilon_x = a^2 c^2, \quad \omega_2^2 \varepsilon_y = a^2 c^2, \quad (18)$$

уравнение (15) при $k_{m0} = 0$ дает другие значения для частот, т. е. при $F \neq 0$ границы области (6) смещены, что указывалось выше. Эти смещения являются результатом влияния одной периодичности на свойства, обусловленные другой периодичностью. Обозначим смещения границ ω_1 и ω_2 соответственно через $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$. Тогда, сохраняя лишь первую степень отношений $\Delta\omega_1/\omega_1$ и $\Delta\omega_2/\omega_2$ и пренебрегая их произведением с $\varepsilon_{1x} \varepsilon_{0x}^{-1}$, $\varepsilon_{1y} \varepsilon_{0y}^{-1}$ и $a_1 a_0^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega_{1,2}}{\omega_{1,2}} = & -\frac{1}{2} c^2 F_1 \omega_{1,2}^{-2} \varepsilon_{0x, y}^{-1} \left(\frac{\omega_{1,2}^2}{c^2} \varepsilon_{0y, x} - a_0^2 \right)^{-1} \times \\ & \times \left[\left(\frac{\omega_{1,2}^2}{c^2} \varepsilon_{0y, x} - a_0^2 - b^2 \right) b^2 - 4 a_0^2 b^2 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

где F_1 получается из F подстановкой $k_{m0} = 0$, а также подстановками $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$ при определении соответственно $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$. При $a_1 = 0$, $\varepsilon_{1x} \sim 10^{-4} \varepsilon_{0x}$, $\varepsilon_{1y} \sim 10^{-4} \varepsilon_{0y}$, $(\varepsilon_{0x} - \varepsilon_{0y}) \sim 10^{-2} (\varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0y})$, $\omega^2 \varepsilon_{0x, y} \sim a_0^2 c^2$ получаем $\Delta\omega_{1,2} \sim 10^{-8} \omega_{1,2}$. В оптической области $\omega \sim 10^{15} \text{ сек}^{-1}$ и $\Delta\omega$ будет иметь значение порядка 10^7 .

Рассмотрим теперь вопрос об определении k_{m0} в двухволновом приближении. Если параметры, характеризующие слоистость, достаточно малы, то отличие k_{m0} (при наличии слоистости) от k_m также будет малым, за исключением некоторых областей частот, которые будут определены ниже. Это означает, что ветви дисперсионного уравнения (2) идут близко к ветвям дисперсионного уравнения (15). Частным проявлением смещения ветвей является смещение границ дихроичной области, представляющих собой точки пересечения ветвей с осью частот. Малость указанных смещений частот подтверждает то физически понятное утверждение, что ветви k_m и k_{m0} должны идти, вообще говоря, близко друг к другу. Поэтому k_{m0} можно искать в виде

$$k_{m0} = k_m (1 + u). \quad (20)$$

Подставим это выражение в (15). Пренебрегая членами порядка u^2 и выше, а также произведениями u с $\varepsilon_{1x} \varepsilon_{0x}^{-1}$, $\varepsilon_{1y} \varepsilon_{0y}^{-1}$ и $a_1 a_0^{-1}$, приходим к выражению для u

$$u = F_2 \left\{ 4 k_m^2 b \left(k_m - \frac{b}{2} \right) \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{0x} - \varepsilon_{0y}}{2} \right)^2 + 4 a_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0y}}{2} \right] \right\}^{-1}, \quad (21)$$

где F_2 получается из F заменой $k_{m0} \rightarrow k_m$. Соотношение (21) справедливо при $u \ll 1$ и неприменимо вблизи частот, на которых $k_m = 0$ или $k_m = \frac{b}{2}$. Соответствующие частоты — границы области (6) и частоты, определяемые из (14) (частоты, в окрестности которых одноволновое приближение неприменимо).

Полученные выше соотношения относились к случаю, когда $m = 1, 2$ (прямые волны). При $m = 3, 4$ (обратные волны) вместе с амплитудами E_{m0} в (9) должны быть учтены и амплитуды $E_{m, +1}$ (см. выше). Выражения, соответствующие случаям $m = 3, 4$, получаются из приведенных выше соотношений заменой $b \rightarrow -b$.

Выражаю глубокую благодарность Г. М. Гарибяну за полезные замечания.

Замечание при корректуре: Вышеприведенные соотношения остаются в силе и в случае зависимости ε_{1x} , ε_{1y} , a_1 от времени с частотой $\omega_1 \ll \omega$. Например, в случае гиперзвука [1] $\omega_1 \lesssim 10^{-6} \omega$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 11.IV.1975

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bacr. Compt. Rend. Acad. Sci., E 25, 270 (1970).
2. Е. И. Кац. ЖЭТФ, 59, 1854 (1970).
3. О. С. Ерицян. Изв. АН АрмССР, Физика, 10, 171 (1975).

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՇԵՐՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՄԲ ՕԺՏՎԱԾ ՊԱՐՈՒՐԱՅԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Հ. Ս. ԵՐԻՑՅԱՆ

Քննարկված է էլեկտրամագնիսական ալիքի տարածումը պարուրայնությամբ ու շերտավորությամբ օժտված միջավայրում: Ստացված ու վերլուծված է դիսպերսիոն հավասարումը: Ցույց է տրված, որ այսպիսի միջավայրերին բնորոշ է բրեգյան նոր հաճախությունների ծագումը, ինչպես նաև շերտավորության բացակայությամբ գոյություն ունեցող բրեգյան հաճախային տիրույթի սահմանների շեղումը: Ստացված առնչություններից բխում է, որ պարուրի քայլի պարբերական մոդուլյացիայի շնորհիվ տարածական հարմոնիկների սպեկտրը հարստանում է, և մեծանում է առաջին մոտավորությամբ զրգոված հարմոնիկների թիվը: Ի տարբերություն միայն պարուրայնությամբ օժտված միջավայրից, որում բրեգյան անդրադարձում կարող է կրել միայն աջ կամ ձախ շրջանային բևեռացված ալիքը, կրկնակի պարբերականության առկայության դեպքում բրեգյան անդրադարձում են կրում և՛ աջ, և՛ ձախ բևեռացված ալիքները, ընդհանրապես տարբեր հաճախությունների դեպքում:

THE PROPAGATION OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE IN LAMINATED MEDIA WITH HELICAL STRUCTURE

H. S. ERITSYAN

The propagation of an electromagnetic wave in the medium having helical and lamination types of periodic inhomogeneity is considered. A dispersion equation is obtained and discussed. It is shown that for such media new Bragg frequencies arise and the boundaries of Bragg reflection range shift.