

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПАРАМЕТРОВ
СТОКСА СТАЦИОНАРНОГО ШУМОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Л. П. МУРЗА

Рассматривается следующая задача поляриметрии. На вход приемника поступает стационарное случайное электромагнитное излучение, которое считается комплексно-гауссовым и частично поляризованным. Требуется найти алгоритм оптимального оценивания неизвестных параметров Стокса, описывающих его поляризацию [1].

Поперечное электромагнитное поле волны в точке наблюдения удобно описывать при помощи двумерной комплексной случайной функции времени — напряженности электрического поля $\mathbf{r}(t) \in C_2$. В отсутствии регулярной составляющей статистические характеристики комплексно-гауссова излучения полностью описываются тензором временной когерентности, который в дискретном времени имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^+ \rangle & \langle \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2^+ \rangle & \cdots & \langle \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_N^+ \rangle \\ . & \langle \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^+ \rangle & . & . \\ . & . & . & . \\ \langle \mathbf{r}_N \mathbf{r}_1^+ \rangle & . & . & \langle \mathbf{r}_N \mathbf{r}_N^+ \rangle \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_n \equiv \mathbf{r}(t_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$, $\mathbf{r}_n^+$ — эрмитово-сопряженный вектор, а фигурные скобки означают усреднение. Диагональными элементами блочной матрицы (1) являются тензоры поляризации, которые в силу условия стационарности не зависят от времени, $\langle \mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^+ \rangle = K$, и для частично поляризованного излучения являются невырожденными. Недиagonальные элементы (1) можно обратить в нуль, выбирая интервалы между отсчетами большими, чем время корреляции, которое обратно пропорционально спектральной полосе излучения. При этих ограничениях совместная плотность распределения случайных векторов $\mathbf{r}_n$ факторизуется и имеет следующий вид [2, 3]:

$$p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{n=1}^N p(\mathbf{r}_n), \quad p(\mathbf{r}_n) = \frac{\exp(-\mathbf{r}_n^+ K^{-1} \mathbf{r}_n)}{\pi^2 \det K}. \quad (2)$$

Для дальнейшего удобно перейти к описанию излучения с помощью параметров Стокса, представляющих разложение матрицы поляризации K по полной ортогональной системе матриц Паули:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^3 \sigma_\alpha \Pi_\alpha, \quad \sigma_\alpha = \text{tr } K \Pi_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (3)$$

При этом совокупность параметров Стокса образует вещественный четырехвектор σ в псевдоевклидовом пространстве [4] с метрикой

$$(\sigma, \sigma') = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 g_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \sigma'_{\beta}, \quad \|\sigma\|^2 = (\sigma, \sigma), \quad g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Для частично поляризованного излучения норма вектора Стокса положительна, так как

$$\det K = \frac{1}{4} (\sigma_0^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) = \frac{\|\sigma\|^2}{4} > 0. \quad (5)$$

Обратная матрица K^{-1} из (2) выражается через параметры Стокса по следующему правилу:

$$K^{-1} \equiv Q = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^3 q_{\alpha} \Pi_{\alpha}, \quad q_{\alpha} = \text{tr } Q \Pi_{\alpha} = \frac{4}{\|\sigma\|^2} \sum_{\beta=0}^3 g_{\alpha\beta} \sigma_{\beta}, \quad (6)$$

а само распределение совокупности векторов $\mathbf{r}_n$ в стоксовом представлении принимает вид

$$p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \left\{ \frac{4}{\pi^2 \|\sigma\|^2} \exp \left[-2 \frac{(\rho, \sigma)}{\|\sigma\|^2} \right] \right\}^N, \quad \rho_{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{r}_n^+ \Pi_{\alpha} \mathbf{r}_n. \quad (7)$$

В качестве оптимальной оценки $\hat{\sigma}$ неизвестного вектора σ примем значение, дающее максимум распределению (7), которое, как функция σ , называется функцией правдоподобия. Для этого приравняем нулю градиент и убеждаемся, что оптимальной оценкой является достаточная статистика (7)

$$\hat{\sigma} = \rho,$$

$$\nabla_{\sigma} p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \Big|_{\hat{\sigma}} = - \frac{2N}{\|\sigma\|^2} \left[\sigma + \rho - 2 \sigma \frac{(\rho, \sigma)}{\|\sigma\|^2} \right] = 0. \quad (8)$$

Найдем среднее значение и матрицу ковариаций ошибок случайного вектора оценки, для чего вычислим характеристическую функцию

$$\Theta(\mathbf{u}) = \langle \exp(i \sum_{\alpha=0}^3 u_{\alpha} \rho_{\alpha}) \rangle = \Theta_1^N(\mathbf{u}),$$

$$\Theta_1(\mathbf{u}) = \langle \exp \left[\mathbf{r}_n^+ \left(\frac{i}{N} \sum_{\alpha=0}^3 u_{\alpha} \Pi_{\alpha} \right) \mathbf{r}_n \right] \rangle =$$

$$= \frac{\det Q}{\pi^2} \int_{C_2} \exp \left[-\mathbf{r}_n^+ \left(Q - \frac{2i}{N} U \right) \mathbf{r}_n \right] d\mathbf{r}_n = \frac{\|\mathbf{q}\|^2}{\left\| \mathbf{q} - \frac{2i}{N} \mathbf{u} \right\|^2}, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^3 u_{\alpha} \Pi_{\alpha}. \quad (9)$$

Интеграл берется путем приведения матрицы $Q - \frac{2i}{N} U$ к каноническому виду, вводится 4-вектор $\mathbf{u}$ и используются обозначения (4) и (5).

Произведя дифференцирование по $\mathbf{u}$ и заменяя параметры q_{α} на σ_{α} по формулам (6), после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \langle \rho_\alpha \rangle &= \frac{1}{i} \frac{\partial \Theta(\mathbf{u})}{\partial u_\alpha} \Big|_{\mathbf{u}=0} = \sigma_\alpha, \\ R_{\alpha\beta} &= \langle (\rho_\alpha - \sigma_\alpha)(\rho_\beta - \sigma_\beta) \rangle = \langle \rho_\alpha \rho_\beta \rangle - \sigma_\alpha \sigma_\beta = \\ &= \frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 \Theta(\mathbf{u})}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \Big|_{\mathbf{u}=0} - \sigma_\alpha \sigma_\beta = N^{-1} \left(\sigma_\alpha \sigma_\beta - g_{\alpha\beta} \frac{\|\sigma\|^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, среднее значение оценки вектора Стокса совпадает с истинным значением, т. е. оценка является несмещенной [2, 5] при любом N , а матрица ковариации ошибок уменьшается с увеличением времени наблюдения.

Часто качество оценки характеризуется байесовым риском [2, 5], который в нашем случае принимает следующий вид:

$$l^2 \equiv \sum_{\alpha, \beta=0}^3 c_\alpha c_\beta R_{\alpha\beta} = N^{-1} \left[\left(\sum_{\alpha=0}^3 c_\alpha \sigma_\alpha \right)^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{c}\|^2 \|\sigma\|^2 \right]. \quad (11)$$

В качестве примера найдем дисперсию оценки мощности излучения, полагая в (11) $\mathbf{c} = \{1, 0, 0, 0\}$,

$$l^2 = N^{-1} \sigma_0^2 \left(1 - \frac{\|\sigma\|^2}{2} \right) = N^{-1} (\text{tr } K)^2 \left[1 - 2 \frac{\det K}{(\text{tr } K)^2} \right] = (\text{tr } K)^2 \frac{1 + m^2}{2N}, \quad (12)$$

где $m < 1$ — степень поляризации излучения [1]. Для излучения с заранее известной степенью поляризации m и заданной нормированной ошибкой оценивания из (12) определяется необходимая длительность наблюдений N .

Институт радиофизики и электроники АН АрмССР

Поступила 14.I.1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Канарейкин, В. А. Потехин, И. Ф. Шишкин. Морская поляриметрия, Изд. Судостроение, Л., 1968.
2. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, Изд. Советское радио, М., 1968, книга 2.
3. H. L. Van Trees. Detection, Estimation and Modulation Theory, Wiley, New York, 1971, Part III.
4. П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1967.
5. Д. Сакрисон. Лекции об аналоговой связи, Изд. Мир, М., 1974.

ՍՏԱՅԻՈՆԱՐ ՀԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՍՏՈՔՍԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՄԱՔՍԻՄԱԼ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄԸ

Լ. Պ. ՄՈՒՐԶԱ

Անկախ բնորոշիչի հիման վրա առաջարկված է մի ալգորիթմ՝ ստացիոնար աղմուկային-հառադայնական Ստոքսի պարամետրերի օպտիմալ գնահատման համար: Գտնված է՝ գնահատ-

ման վեկտորի միջին արժեքը և սխալների կովարիացիայի մատրիցան: Իրրև օրինակ ստացված է ճառագայթման հզորության գնահատման դիսպերսիան:

MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATE OF STOKES PARAMETERS FOR STATIONARY NOISELIKE RADIATION

L. F. MURZA

The ML-algorithm of Stokes parameter vector is suggested based on the independent sampling of noise-like E. M. field. The estimates mean and the error covariance matrix are obtained. The variance of radiation power estimate is considered as an example.