

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ, ПОМЕЩЕННОМ В АНИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ

В. А. БАРЕГАМЯН

Металлический волновод, состоящий из трубок определенной длины, периодически расположенных на одной оси, погружен в анизотропную среду. Снутри волновод заполнен изотропным диэлектриком. Получены выражения полей и дисперсионное уравнение несимметричных волн, которое исследуется в частных случаях.

В анизотропную среду погружен кольцевой волновод, состоящий из идеально проводящих металлических трубок длиной $l=d$ и радиусом a . Они расположены периодически (с периодом l) на одной оси, которая совпадает с осью z (в работе используется цилиндрическая система координат r, φ, z). Внешнее пространство волновода имеет следующие электрические характеристики: $\epsilon_{rr} = \epsilon_{\varphi\varphi} = \epsilon_0$, $\epsilon_{zz} = \epsilon_e$, а магнитная проницаемость μ равна единице:

Предположим, что волновод заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Как будет видно из дальнейшего, несимметричные волны не разделяются, что затрудняет решение по сравнению со случаем симметричных волн. Такие системы интересны тем, что они используются в замедляющих приборах, в лампах особой конструкции, а в последние годы—в дифракционных генераторах миллиметрового и субмиллиметрового диапазона.

В символической форме компоненты электромагнитного поля запишем в виде

$$f(r, \varphi, z, t) = \sum_n f_n(r) e^{i(\gamma_n z + \varphi)} e^{-i\omega t}.$$

Как и в работе [1], продольный коэффициент распространения есть $\gamma_n = \beta_0 + \frac{2\pi n}{l}$, где l — период волновода, n — номер пространственной гармоники.

По аналогии с [1] решение внутри волновода ищем в виде

$$\begin{aligned} E_{nz1} &= a_n \Gamma_{n2}^2 J_{\xi}(\Gamma_{n2} r), \\ H_{nz1} &= b_n \Gamma_{n2}^2 J_{\xi}(\Gamma_{n2} r). \end{aligned} \quad (1)$$

Вне волновода решение ищем в виде

$$\begin{aligned} E_{nz2} &= a_n \Gamma_{n0}^2 H_{\xi}^{(1)}(\Gamma_{n0} r), \\ H_{nz2} &= d_n \Gamma_{n0}^2 H_{\xi}^{(1)}(\Gamma_{n0} r). \end{aligned} \quad (2)$$

Суммарное поле внутри волновода в изотропной среде запишем следующим образом:

$$E_{z1} = e^{i\xi\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \Gamma_{n2}^2 J_{\xi}(\Gamma_{n2} r) e^{i\gamma_n z},$$

$$E_{\varphi1} = e^{i\xi\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\xi\gamma_n}{r} c_n J_{\xi}(\Gamma_{n2} r) - ik_0 \Gamma_{n2} d_n J_{\xi}^1(\Gamma_{n2} r) \right] e^{i\gamma_n z},$$

$$E_{r1} = e^{i\xi\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\xi k_0}{r} d_n J_{\xi}(\Gamma_{n2} r) + i\gamma_n \Gamma_{n2} c_n J_{\xi}^1(\Gamma_{n2} r) \right] e^{i\gamma_n z},$$

$$H_{z2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \Gamma_{n2}^2 J_{\xi}(\Gamma_{n2} r) e^{i\gamma_n z} e^{i\xi\varphi},$$

$$H_{\varphi1} = e^{i\xi\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\xi\gamma_n}{r} d_n J_{\xi}(\Gamma_{n2} r) + i\varepsilon_2 \Gamma_{n2} c_n J_{\xi}^1(\Gamma_{n2} r) \right] e^{i\gamma_n z},$$

$$H_{r1} = e^{i\xi\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\xi\varepsilon_2 k_0}{r} c_n J_{\xi}(\Gamma_{n2} r) + i\gamma_n \Gamma_{n2} d_n J_{\xi}^1(\Gamma_{n2} r) \right] e^{i\gamma_n z}.$$

Поле в анизотропной среде имеет вид

$$E_{z2} = e^{i\xi\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{n0}^2 a_n H_{\xi}^{(1)}(\Gamma_{n0} r) e^{i\gamma_n z},$$

$$E_{\varphi2} = e^{i\xi\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\xi\gamma_n}{r} a_n H_{\xi}^{(1)}(\Gamma_{n0} r) - ik_0 \Gamma_{n0} b_n H_{\xi}^{(1)'}(\Gamma_{n0} r) \right] e^{i\gamma_n z},$$

$$E_{r2} = e^{i\xi\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\xi k_0}{r} b_n H_{\xi}^{(1)}(\Gamma_{n0} r) + i\gamma_n \Gamma_{n0} a_n H_{\xi}^{(1)'}(\Gamma_{n0} r) \right] e^{i\gamma_n z}, \quad (3)$$

$$H_{z2} = e^{i\xi\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{n0}^2 b_n H_{\xi}^{(1)}(\Gamma_{n0} r) e^{i\gamma_n z},$$

$$H_{\varphi2} = e^{i\xi\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\xi\gamma_n}{r} b_n H_{\xi}(\Gamma_{n0} r) + i\varepsilon_0 k_0 \Gamma_{n0} a_n H_{\xi}^{(1)'}(\Gamma_{n0} r) \right] e^{i\gamma_n z},$$

$$H_{r2} = e^{i\xi\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\xi\varepsilon_0 k_0}{r} a_n H_{\xi}(\Gamma_{n0} r) + i\gamma_n \Gamma_{n0} b_n H_{\xi}^{(1)'}(\Gamma_{n0} r) \right] e^{i\gamma_n z}.$$

Для упрощения записи введем следующие безразмерные параметры:

$$\theta_n = \frac{l}{2\pi} \Gamma_{n2} J_{\xi}(\Gamma_{n2} a) a_n, \quad T_n = \frac{l}{2\pi} \Gamma_{n2} J_{\xi}'(\Gamma_{n2} a) b_n,$$

$$\xi_n^E = \frac{|\nu + n|}{\nu + n} \frac{1}{t_n} (\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}) \sqrt{\frac{\varepsilon_2 x^2}{(\nu + n)^2} - 1},$$

$$\xi_n^H = \frac{1}{2} \frac{|\nu + n|}{\nu + n} \left[\frac{1}{f_{\xi}(\Gamma_{n2} a)} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 x^2}{(\nu + n)^2} - 1} - \frac{1}{F_{\xi}(\Gamma_{n0} a)} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 x^2}{(\nu + n)^2} - 1} \right],$$

$$\begin{aligned}
t_n &= \varepsilon_2 f_\xi(\Gamma_{n2} a) - \varepsilon_0 \frac{\Gamma_{ne} \Gamma_{n2}}{\Gamma_{n0}^2} F_\xi(\Gamma_{ne} a) + \xi^2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{a^2} \frac{\gamma_n^2}{\Gamma_{n0}^3 \Gamma_{n2}} \frac{1}{F_\xi(\Gamma_{n0} a)}, \\
N_n &= \frac{i\gamma_n}{k_0 a} \left[\frac{2}{\Gamma_{n2} f_\xi(\Gamma_{n2} a)} - \frac{1}{\Gamma_{n0} F_\xi(\Gamma_{n0} a)} \right], \quad f_\xi(z) = \frac{J'_\xi(z)}{J_\xi(z)}, \\
K_n &= \frac{ik_0}{2a} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}} \frac{\gamma_n}{\Gamma_{n0} \Gamma_{n2}^2} \frac{1}{F_\xi(\Gamma_{n0} a)}, \quad F_\xi(z) = \frac{H_\xi^{(1)'}(z)}{H_\xi^{(1)}(z)}, \\
Z_n &= (\nu + n) \tan \theta_n, \quad X_n = (\nu + n) T_n, \quad \nu_n = \frac{\beta_0 l}{2\pi}, \quad \chi = \frac{k_0 l}{2\pi}, \\
\chi_n^{E, H} &= 1 - \frac{|n|}{n} \xi_n^{E, H}, \quad M_n = \frac{i}{k_0 a} \frac{1}{\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}} \frac{\gamma_n^2}{\Gamma_{n0}^2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Наложение граничных условий к суммарному полю приводит к следующим связям между неизвестными коэффициентами a_n , b_n , c_n и d_n :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{\Gamma_{n2}^2}{\Gamma_{n0}^2} \frac{J_\xi(\Gamma_{n2} a)}{H_\xi^{(1)}(\Gamma_{ne} a)} a_n, \\
d_n &= \frac{\Gamma_{n2}}{\Gamma_{n0}} \frac{J'_\xi(\Gamma_{n2} a)}{H_\xi(\Gamma_{n0} a)} b_n + \xi \frac{i\gamma_n}{ak_0} \frac{\Gamma_{n2}^2 - \Gamma_{n0}^2}{\Gamma_{n0}^3} \frac{J_\xi(\Gamma_{n2} a)}{H_\xi(\Gamma_{n0} a)} a_n.
\end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, необходимо определить две группы неизвестных коэффициентов a_n и b_n (z_n и x_n). Кроме связи (5) между коэффициентами граничные условия дают две системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_n и b_n (z_n и x_n). В отличие от случая симметричных волн эти уравнения связаны между собой. Для решения одной из этих систем полагаем, что другая группа коэффициентов, входящих в нее, задана.

Системы уравнений относительно z_n и x_n , как показано в работе [2], можно решить методом Римана-Гильберта, впервые разработанным авторами работы [1]. Опуская выкладки, приведем окончательный вид уравнений. Для волн типа E имеем

$$\begin{aligned}
Z_m \tilde{R}_\sigma + \xi N_m X_m \tilde{R}_\sigma &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^E Z_n \tilde{K}_m^n + \\
&+ \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} N_n X_n \tilde{K}_m^n \quad (m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots),
\end{aligned} \tag{6}$$

а для волн типа H уравнение есть

$$\begin{aligned}
X_m \tilde{R}_\sigma - \xi M_m \xi_m^E Z_m \tilde{R}_\sigma &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^H X_n \tilde{K}_m^n - \\
&- \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} M_n \xi_n^E Z_n \tilde{K}_m^n - \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n \xi_n^E Z_n \tilde{K}_m^n.
\end{aligned} \tag{7}$$

Коэффициенты $\tilde{R}_\sigma$ и $\tilde{K}_m^n$, приведенные в работе [3], в уравнениях (6) зависят от аргумента $u = -\cos \frac{\pi d}{l}$, а в (7) — от $u = \cos \frac{\pi d}{l}$. Как следует из систем уравнений (6) и (7), при $\xi \neq 0$ несимметричные волны не разделяются на поперечные магнитные и поперечные электрические волны и имеют гибридный характер.

Однородные системы (6) и (7) образуют полную систему уравнений относительно неизвестных x_n и z_n . Эта однородная система будет иметь решения, отличные от нуля, если определитель общей системы равен нулю. Это уравнение дает возможные значения коэффициента распространения вдоль кольцевого волновода, погруженного в анизотропную среду. Общее поле внутри и вне волновода определяется суперпозицией всех этих собственных волн.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Когда длина волны больше периода волновода ($\kappa \ll 1$), можно пренебречь пространственными гармониками, возникшими за счет периодичности волновода, и для основной гармоники получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\left(1 - \xi_0^H \ln \frac{1+u}{2}\right) \left(1 - \xi_0^E \ln \frac{1-u}{2}\right) = -\xi^2 N_0 \xi_0^E \left(k_0 \ln \frac{1+u}{2} - M_0\right), \quad (8)$$

откуда можно получить дисперсионное уравнение для изотропного диэлектрического стержня, находящегося в безграничной анизотропной среде, и дисперсионное уравнение для сплошного волновода.

При отсутствии волновода ширину щели следует положить равной периоду волновода, т. е. $l=d$ ($u=-1$). В этом случае имеем дисперсионное уравнение для изотропного диэлектрического стержня

$$\xi_0^H = \xi^2 k_0 N_0 \xi_0^E. \quad (9)$$

2. Когда аргументы функций Бесселя и Ханкеля большие, т. е. $|\Gamma a| \gg 1$, и $\xi \neq 0$, то имеем

$$f_\xi(z) = -i + o\left(\frac{\xi}{z}\right), \quad F_\xi(z) = i + o\left(\frac{\xi}{z}\right).$$

Этот случай соответствует коротким длинам волн. Для световодов всегда имеет место такое приближение. Если положить $F_\xi(z) = i$ и $f_\xi(z) = -i$, то в выражениях (4), кроме θ_n и T_n , функции Бесселя и Ханкеля не будут фигурировать. Это значит, что граница $r=a$ меньше будет влиять на распространение волн, чем в случае длинных волн. Системы (6) и (7) являются хорошими сходящимися системами, так как коэффициенты ξ_n^H и ξ_n^E стремятся к нулю как $\frac{1}{n^2}$ при $n \rightarrow \infty$. Вклад в общее поле высших про-

странственных гармоник падает с увеличением номера гармоники. Поэтому вместо бесконечных систем (6) и (7) можно брать усеченные системы уравнений, которые дают хорошее приближение для решения задач.

3. Когда аргументы функций Бесселя и Ханкеля малы, т. е. $|\Gamma a| \ll 1$, и $\xi \neq 0$, то имеем

$$f_{\xi}(z) = \frac{\xi}{z} \text{ , } F_{\xi}(z) = -\frac{\xi}{z} \text{ .}$$

Это соответствует длинноволновому приближению относительно радиуса волновода. В этом случае детерминант общей системы (6) и (7) дает более простое дисперсионное уравнение, которое можно решить на ЭВМ и получить искомые возможные значения коэффициентов распространения.

В заключение заметим, что при $\xi = 0$ получаются результаты, приведенные в работе [2].

Ереванский государственный
университет

Поступила 20.VI.1974

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Э. С. Ацанович, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 34, 1950 (1964).
2. В. А. Барегамян. Изв. АН АрмССР, Физика, 7, 97 (1972).
3. В. А. Барегамян. Сб. Радиотехника, Изд. ХГУ, 1967, вып. 4.

ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՏԵՂԱՎՈՐՎԱԾ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԱԼԻՔԱՏԱՐՈՒՄ

Վ. Ա. ԲԱՐԵԳԱՄՅԱՆ

Միևնույն առանցքի վրա պարբերաբար դասավորված որոշակի երկարություն ունեցող խողովակներից կազմված օղակալին ալիքատարն ընկղմված է անիզոտրոպ միջավայրի մեջ: Ննթադրվում է, որ ալիքատարը կազմված է իդեալական հաղորդիչներից, իսկ անիզոտրոպ միջավայրը բնութագրվում է անկյունագծային տեսքի դիէլեկտրիկ թափանցելիության տենզորով: Ալիքատարը լցված է իզոտրոպ դիէլեկտրիկով: Ստացված են արտահայտություններ դաշտերի համար, ինչպես նաև ոչ սիմետրիկ ալիքների դիսպերսիոն հավասարումը: Այդ հավասարումը ուսումնասիրված է երկարալիք և կարճալիք մոտավորություններով:

NON-SYMMETRIC WAVES IN CIRCULAR WAVEGUIDE IMMERSED IN ANISOTROPIC MEDIUM

V. A. BAREGAMYAN

The fields and the dispersion equation of non-symmetric waves in the circular waveguide loaded with an isotropic dielectric are obtained. The dispersion equation is investigated in the long-wavelength as well as in the short-wavelength approximation.