Изв. АН Армянской ССР, Физика, 10, 26—32 (1975)

ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ И НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

К. А. БАРСУКОВ, Н. А. ЗВОННИКОВ

В работе рассматривается отражение и прохождение плоской электромагнитной волны, падающей на полубесконечный диэлектрик. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость последнего модулируется по закону бегущей волны. Вычислены амплитуды отраженных и прошедших волн в случаях, когда направление распространения волны, модулирующей проницаемость, перпендикулярно и параллельно плоскости раздела. Показано, что мощность отраженных от модулированной среды волн может значительно превышать мощность падающего поля. Найдено выражение для коэффициента усиления по мощности.

Известно, что взаимодействие мощных волн накачки с электромагнитной волной относительно малой интенсивности в средах в линейном приближении можно описать модуляцией диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(z,\ t) = \varepsilon_0 \left[1 + m \cos k_u (z - ut)\right], \tag{1}$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость среды в отсутствие модуляции ($m=0$), $k_0 u$ и k_0 — частота и волновое число волны накачки, которая по своей природе не обязательно электромагнитная.

В настоящей работе, следуя методу [1], рассмотрено падение плоской волны TE на полупространство в случаях, когда направление распространения модуляции перпендикулярно и параллельно границе модулированной по закону (1) среды.

1. Пусть диэлектрик модулирован по закону (1) и занимает в вакууме полупространство $z>0$. На диэлектрик со стороны $z<0$ падает плоская монохроматическая волна частоты ω_0 под углом φ к поверхности. Поперечные компоненты электрического и магнитного полей падающей волны для TE-поляризации запишутся в виде

$$\begin{aligned} E_y(x,\ z,\ t) &= e^{i(p_0 z + \lambda_0 x - \omega_0 t)}, \\ H_x(x,\ z,\ t) &= Y_0\, e^{i(p_0 z + \lambda_0 x - \omega_0 t)}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$p_0 = \frac{\omega_0}{c}\cos\varphi, \quad \lambda_0 = \frac{\omega_0}{c}\sin\varphi, \quad Y_0 = -\frac{p_0 c}{\omega_0}.$$

Магнитную проницаемость во всем пространстве положим равной единице.

В параметрически модулированной по закону (1) среде, в которой векторы поля связаны соотношениями $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \vec{H}$, TE-поле можно выразить через скалярную функцию M [1]

$$\vec{E} = \frac{1}{c\varepsilon}\,\mathrm{rot}\left(\varepsilon\frac{\partial M}{\partial t}\vec{e}_z\right), \quad \vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial M}{\partial t}\vec{e}_z\right) - \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\, M\vec{e}_z, \tag{3}$$

где $\vec{e}_z$ — единичный вектор в направлении распространения модуляции среды. Для функции M получается уравнение с разделяющимися переменными, сводящееся к уравнению Хилла. В работе [2] найдено аналитическое выражение для M, которое упрощается при малых значениях параметра l $(l = m\beta^2/(1-\beta^2),\ \beta = u\sqrt{\varepsilon_0}/c)$ и с точностью до членов порядка l^2 записывается в виде

$$M = e^{i(\lambda_0 x + p_0 z - \omega_0 t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{ink_0(z-ut)}, \tag{4}$$

где

$$p_0 = \frac{\gamma}{u} - \frac{\gamma}{bu\sqrt{1-l^2}} + \frac{k_0\mu}{2},\ \omega_0 = -\frac{\gamma}{b\sqrt{1-l^2}} + \frac{k_0 u\mu}{2},\ b = 1-\beta^2.$$

В найденном приближении V_n пропорциональны $l^{|n|}$ и равны нулю при $|n| > 2$, а остальные задаются соотношениями

$$V_0 = d_{-1}a_1^{-1} + d_0 + d_1 a_{-1}^1,\quad V_{\pm1} = d_{\pm1} + d_0 a_{\pm1}^0,\quad V_{\pm2} = d_{\pm1} a_{\pm1}^{\pm1},$$

$$d_{\pm1} = \frac{\theta_1 d_0}{(\mu\pm2)^2 - \theta_0},\quad a_{\pm1}^0 = \pm\frac{l}{2}\frac{\omega_0}{k_0 u}, \tag{5}$$

$$a_{\pm1}^1 = \pm\frac{l}{2k_0 u}(\omega_0 + k_0 u),\quad a_{\pm1}^{-1} = \pm\frac{l}{2k_0 u}(\omega_0 - k_0 u).$$

Произвольная постоянная d_0 выбирается из условия нормировки $V_0 = 1$.

Величины μ, γ и λ (а вместе с ними p_0, ω_0, λ) связаны дисперсионным уравнением

$$\mu^2 = \theta_0 + \frac{\theta_1^2}{(\mu-2)^2-\theta_0} + \frac{\theta_1^2}{(\mu+2)^2-\theta_0}, \tag{6}$$

где

$$\theta_0 = 4\left[\frac{\gamma^2}{k_0^2u^2b^2(1-l^2)} - \frac{\gamma^2+\lambda^2u^2}{k_0^2u^2b\sqrt{1-l^2}}\right],$$

$$\theta_1 = \frac{2(\gamma^2+\lambda^2u^2)\,l}{k_0^2u^2b}.$$

Как известно из теории уравнения Хилла, если μ является решением уравнения (6), то решением является также и $\mu + 2m$, где $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, что приводит к связи между волновыми числами и частотой. Для фиксированного значения λ_0 имеется бесконечное множество решений p_0^m и следовательно, в силу принципа суперпозиции выражение (4) можно записать в виде

$$M = e^{-i\lambda_0 x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{n-m}^m e^{i(p_n^m z - \omega_n t)}, \tag{7}$$

где $p_n^m = p_0^m + k_0 n$, $\omega_n = \omega_0 + k_0 un$, причем в нашем случае должны быть взяты только те значения p_0^m, которые соответствуют волнам с положительной групповой скоростью. Необходимые нам E_y^T и H_x^T — составляющие поля в модулированной среде — согласно (3) и (7) равны

$$E_y^T = e^{i\lambda_0 x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{n-m}^m \frac{\omega_n}{\omega_m} e^{i(p_n^m z - \omega_n t)},$$

$$H_x^T = e^{i\lambda_0 x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{n-m}^m \frac{\omega_n}{\omega_m} Y_n^m e^{i(p_n^m z - \omega_n t)}, \tag{8}$$

где

$$Y_n^m = -\frac{p_n^m c}{\omega_n}.$$

Отраженное поле запишем также в виде ряда

$$E_y^R(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i(\lambda_0 x - p_n z - \omega_n t)},$$

$$H_x^R(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n Y_n e^{i(\lambda_0 x - p_n z - \omega_n t)}, \tag{9}$$

где

$$Y_n = -\frac{p_n c}{\omega_n}, \quad p_n = \sqrt{\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 - \lambda_0^2}.$$

Неизвестные коэффициенты c_m, b_n определяются из граничных условий на поверхности $z = 0$

$$E_y(x, 0, t) + E_y^R(x, 0, t) = E_y^T(x, 0, t),$$

$$H_x(x, 0, t) + H_x^R(x, 0, t) = H_x^T(x, 0, t).$$

Подстановка (2), (8) и (9) в последние выражения приводит к следующей бесконечной системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\frac{\omega_n}{\omega_m} V_{n-m}^m (1 + \overline{Y}_n^m) c_m = 2\delta_{0n}, \tag{10}$$

$$\frac{\omega_n}{\omega_m} V_{n-m}^m (1 - \overline{Y}_n^m) c_m = 2 b_n, \tag{11}$$

причем $\overline{Y}_n^m = Y_n^m / Y_n$, δ_{0n} — символ Кронекера и по повторяющимся индексам производится суммирование. При решении бесконечной системы уравнений следует учесть, что элементы матрицы V_{n-m}^m пропорциональны малому параметру $l^{|n-m|}$. Поэтому в соответствующем приближении можно ограничиться решением обрезанной конечной системы (10). Заметим также, что для нахождения обратной матрицы $\frac{\omega_n}{\omega_m} V_{n-m}^m (1 + \overline{Y}_n^m)$ с такими свойствами можно при малых l воспользоваться представлениемНоймана [3].

Ниже мы ограничимся рассмотрением только первого приближения по l. Отличные от нуля в этом приближении c_m, b_n имеют следующий вид:

$$c_0 = \frac{2}{1+\overline{Y}_0^0}, \quad c_{\pm 1} = -\frac{2(1+\overline{Y}_{\pm 1}^0) V_{\pm 1}^0 \omega_{\pm 1}}{(1+\overline{Y}_0^0)(1+\overline{Y}_{\pm 1}^{\pm 1})\omega_0}, \tag{12}$$

$$b_0 = \frac{1-\overline{Y}_0^0}{1+\overline{Y}_0^0}, \quad b_{\pm 1} = -c_{\pm 1}\frac{\overline{Y}_{\pm 1}^{\pm 1} - \overline{Y}_{\pm 1}^{\pm 1}}{1+\overline{Y}_{\pm 1}^0}. \tag{13}$$

Для определения $\overline{Y}_n^m$ и $V_{\pm 1}^0$ следует решить дисперсионное уравнение (6). Если отбросить в нем члены порядка l^2, получим

$$(p_0^m + mk_0)^2 = \frac{\varepsilon_0}{c^2}(\omega_0 + mk_0 u)^2 - \lambda_0^2,$$

$$\overline{Y}_n^m = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 (x_0 + m\beta)^2 - x_0^2 \sin^2\varphi} + \sqrt{\varepsilon_0}(n-m)}{\sqrt{(x_0 + n\beta)^2 - x_0^2\sin^2\varphi}},$$

$$V_{\pm 1}^0 = \frac{x_0^2 l}{2\beta^2\sqrt{\varepsilon_0}}\left[\frac{\varepsilon_0(\beta-1)^2 + \beta^2\sin^2\varphi}{\sqrt{\varepsilon_0}\, b \pm 2x_0(\sqrt{\varepsilon_0 - \sin^2\varphi} - \beta\sqrt{\varepsilon_0})} \pm \frac{\beta\sqrt{\varepsilon_0}}{x_0}\right],$$

где

$$x_0 = \frac{\omega_0 \beta}{k_0 u}.$$

Последние выражения с помощью формул (12) и (13) позволяют найти амплитуды отраженных и прошедших в среду волн. Отношение мощностей отраженной и падающей волн на частоте $\omega_n = \omega_0 + k_0 u n$ равно

$$P_n^R = |b_n|^2 \frac{Y_n}{Y_0}. \quad \text{Так как} \quad Y_n = -\frac{\sqrt{(x_0+\beta n)^2 - x_0^2\sin^2\varphi}}{x_0 + \beta n},$$

некоторые гармоники при $\beta_n < 0$ могут распространяться в виде поверхностных волн.

Выпишем здесь амплитуды (12) и (13) для случая нормального падения, когда $\varphi = 0$

$$c_0 = \frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad c_{\pm 1} = -\frac{m[x_0(1+\sqrt{\varepsilon_0}) \pm (\beta + \sqrt{\varepsilon_0})](x_0 \pm \beta)}{(1+\sqrt{\varepsilon_0})^2(1-\beta)(1+\beta \pm 2x_0)},$$

$$b_0 = \frac{1-\sqrt{\varepsilon_0}}{1+\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad b_{\pm 1} = \mp\frac{m\sqrt{\varepsilon_0}(x_0 \pm \beta)}{(1+\sqrt{\varepsilon_0})^2_1 (1+\beta \pm 2x_0)}. \tag{14}$$

При $x_0 = (1+\beta)/2$ величины c_{-1} и b_{-1} теряют смысл (за исключением выражения для c_{-1} при $\varepsilon_0 = 1$). Это соответствует интенсивному обмену энергией между падающей волной и волной накачки. Для определения амплитуд поля в этом случае необходимо привлечь второе приближение в дисперсионном уравнении (6). Вычисления дают следующие значения:

$$|b_{-1}| = \left|\frac{4\sqrt{\varepsilon_0}}{(1+\sqrt{\varepsilon_0})^2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right|, \tag{15}$$

$$|c_{-1}| = \left|\frac{2(1-\sqrt{\varepsilon_0})}{(1+\sqrt{\varepsilon_0})^2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right|. \tag{16}$$

Формулами (15) и (16) вместо (14) следует пользоваться, когда

$$\left|\frac{2x_0}{1+\beta} - 1\right| \lesssim \left|\frac{m}{4\sqrt{1-\beta^2}}\right|.$$

Коэффициент усиления по мощности для отраженной гармоники согласно (15) равен

$$P^R_{-1} = |b_{-1}|^2 = \left|\frac{16\,\varepsilon_0}{(1+\sqrt{\varepsilon_0})^4}\,\frac{1-\beta}{1+\beta}\right|. \tag{17}$$

Таким образом, когда скорость модуляции направлена к плоскости раздела, отношение мощностей отраженного и падающего полей на частоте $\omega_{-1} = \omega_0 - k_0 u$ вблизи $\omega_0 = (1+\beta)\,ck_0/2\sqrt{\varepsilon_0}$ может намного превышать единицу.

Отметим, что рассмотренная задача решалась в работе [4] методом разностных уравнений. Имеющиеся в этой работе результаты расчета на ЭВМ амплитуд отраженных и прошедших в среду волн для $m=0{,}2$, $\beta=0{,}3$ отличаются от значений, получаемых по формулам (14)—(16), менее чем на $l = m\beta^2/(1-\beta^2) \simeq 2\cdot 10^{-2}$.

2. Пусть теперь диэлектрик с меняющейся по закону (1) диэлектрической проницаемостью занимает пространство $x>0$. Поперечные компоненты поля падающей волны под углом φ относительно нормали к поверхности с частотой ω_0 запишем в виде

$$\begin{aligned} E_y(x, z, t) &= e^{i(\lambda_0 x + p_0 z - \omega_0 t)}, \\ H_z(x, z, t) &= Y_0\, e^{i(\lambda_0 x + p_0 z - \omega_0 t)}, \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\lambda_0 = \frac{\omega_0}{c}\cos\varphi, \quad p_0 = \frac{\omega_0}{c}\sin\varphi, \quad Y_0 = \frac{\lambda_0 c}{\omega_0}.$$

Поле в модулированной среде имеет вид

$$\begin{aligned} E^T_y &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\, e^{i\lambda^m x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V^m_{n-m}\,\frac{\omega_n}{\omega_m}\, e^{i(p_n z - \omega_n t)}, \\ H^T_z &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\, e^{i\lambda^m x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V^m_{n-m}\,\frac{\omega_n}{\omega_m}\, Y^m_n\, e^{i(p_n z - \omega_n t)}, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\omega_n = \omega_0 + nk_0 u, \quad p_n = \frac{\omega_0}{c}\sin\varphi + nk_0, \quad Y^m_n = \frac{\lambda^m c}{\omega_n},$$

λ^m — корни дисперсионного уравнения (6) для фиксированных значений p_0. В первом приближении по l

$$(\lambda^m)^2 = \frac{\varepsilon_0}{c^2}(\omega_0 + mk_0 u)^2 - (p_0 + mk_0)^2.$$

Отраженное поле также запишем в виде суммы гармоник

$$E_y^R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i(-\lambda_n x + p_n z - \omega_n t)},$$
$$H_y^R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n Y_n e^{i(-\lambda_n x + p_n z - \omega_n t)}, \tag{20}$$

где

$$\lambda_n = \sqrt{\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 - p_n^2}, \quad Y_n = \frac{\lambda_n c}{\omega_n}.$$

Подставляя выражения (18)—(20) для полей в граничные условия

$$E_y(0, z, t) + E_y^R(0, z, t) = E_y^T(0, z, t),$$
$$H_z(0, z, t) + H_z^R(0, z, t) = H_z^T(0, z, t),$$

получим уравнения для неизвестных коэффициентов c_m, b_n. Вид уравнений для них и их решения те же, что и в предыдущем случае: (12) и (13). Однако, как легко показать, в первом приближении по l $\overline{Y}^m = Y_n^m / Y_n$ и $V_{\pm 1}^0$ выражаются несколько иначе

$$Y_n^m = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 (x_0 + \beta m)^2 - (x_0 \sin\varphi + m\sqrt{\varepsilon_0})^2}}{\sqrt{(x_0 + n\beta)^2 - (x_0 \sin\varphi + n\sqrt{\varepsilon_0})^2}}, \tag{21}$$

$$V_{\pm 1}^0 = \frac{m x_0 (x_0 \pm \beta)}{2\left| b \pm 2 x_0 \left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varepsilon_0}} - \beta\right)\right|}, \tag{22}$$

где опять $x_0 = \omega_0\beta / k_0 u$. Условие обращения знаменателя последнего выражения в нуль есть, по существу, условие Брэгга

$$\left(\text{при } \beta = 0 \quad \frac{2 x_0 \sin\varphi}{\sqrt{\varepsilon_0}} = 1, \text{ т. е. } 2\frac{\Lambda}{\lambda}\sin\varphi = 1\right),$$

при котором передача энергии волны накачки рассеиваемой волне оказывается наиболее эффективной. Амплитуды отраженных и прошедших в среду волн в этом случае можно найти, если учесть второе приближение по l в дисперсионном уравнении.

Отношение мощностей отраженной и падающей волн оказывается равным

$$P_n^R = |b_n|^2 \frac{Y_n}{Y_0} = |b_n|^2 \frac{\sqrt{(x_0 + n\beta)^2 - (x_0 \sin\varphi + n\sqrt{\varepsilon_0})^2}}{(x_0 + n\beta)\cos\varphi}.$$

Как и в предыдущем случае, некоторые гармоники могут распространяться в виде поверхностных волн (мнимые значения λ_n).

В заключение необходимо отметить, что задача об отражении и прохождении волн на границе модулированной среды, когда направление распространения модуляции параллельно плоскости раздела, рассматривалась неоднократно [5] применительно к оптико-акустическим взаимодействиям. Область применимости полученных нами результатов значительно шире и включает в себя, в частности, случай модуляции среды лучом лазера.

Отметим также, что как в первой, так и во второй разобранных нами задачах несложно получить следующее приближение по l и найти $b_{\pm 2}$, $c_{\pm 2}$, а принимая во внимание результаты работы [2],— рассмотреть падение волн TM.

Ленинградский электротехнический
институт

Поступила 7.V.1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. А. Барсуков.* Радиотехника и электроника, 9, 1173 (1964).
2. *К. А. Барсуков, Э. А. Геворкян, Н. А. Звонников.* Радиотехника и электроника (в печати).
3. *Р. Курант, Д. Гильберт.* Методы математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
4. *S. T. Peng, E. S. Cassedy.* Proc. Symp. on Modern Optics, Brooklyn, N.—Y., Poli. technic Press, MRI-17, 1967, pp 299—342.
5. *М. Борн, Э. Волф.* Основы оптики. Изд. Наука, М., 1973.

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՈՒՄԸ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԵՎ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԿԻՍԱՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՍԱՀՄԱՆԻՑ

Կ. Ա. ԲԱՐՍՈՒԿՈՎ, Ն. Ա. ԶՎՈՆՆԻԿՈՎ

Դիտարկվում է կիսասահմանափակ դիէլեկտրիկի վրա ընկնող հարթ էլեկտրամագնիսական ալիքների անդրադարձումն ու տարածումը։ Ենթադրվում է, որ դիէլեկտրիկի դիէլեկտրիկ թափանցելիությունը մոդուլացվում է վազող ալիքի օրենքով։ Որոշված են անդրադարձվող և տարածվող ալիքների ամպլիտուդները, երբ դիէլեկտրիկ թափանցելիությունը մոդուլացնող ալիքը տարածվում է երկու միջավայրերը սահմանազատող հարթության ուղղահայաց և զուգահեռ ուղղություններով։ Ցույց է տրված, որ մոդուլացված միջավայրից անդրադարձած ալիքների հզորությունը կարող է զգալիորեն գերազանցել ընկնող ալիքների հզորությունը։ Բերված է բանաձև հզորության ուժեղացման գործակցի համար։

REFLECTION AND PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES AT THE BOUNDARY OF SEMI-INFINITE NONSTATIONARY AND NONUNIFORM MEDIUM

K. A. BARSUKOV, N. A. ZVONNIKOV

The reflection and propagation of plane electromagnetic wave at its oblique incidence at semi-infinite dielectric is considered. It is assumed, that the permittivity of a dielectric medium is modulated in an wave-like manner in time and space. The amplitudes of reflected and propagating waves in the cases of plane boundaries perpendicular or paralleled to the axis of modulation of the medium are obtained.