Изв. АН Армянской ССР, Физика, 10, 17—21 (1975)

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ГИРОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

О. С. МЕРГЕЛЯН, А. Р. МКРТЧЯН

Получены приближенные дисперсионные соотношения для электромагнитных волн, распространяющихся в гиротропной и анизотропной периодически-неоднородной среде. Для волн, проходящих через тонкую анизотропную пластинку, получены выражения для амплитуд и углового распределения максимумов рассеянного излучения. Результат обобщен на случай ограниченного в пространстве анизотропного тела.

Законы распространения электромагнитных волн в безграничных гиротропных и анизотропных средах довольно хорошо изучены (см., напр., [1—2]). В настоящей работе в приближении теории возмущений исследовано влияние пространственных неоднородностей на характер распространения электромагнитных волн в анизотропных и гиротропных средах, а также решена задача рассеяния плоской электромагнитной волны на ограниченном анизотропном диэлектрике переменной плотности.

1. Волны в безграничных средах

Пусть диэлектрическая проницаемость среды определяется тензором $\varepsilon_{ik}(z) = \varepsilon_{ik}(z+l)$, а сам тензор имеет вид

$$\varepsilon_{ik}(z) = \begin{pmatrix} \varepsilon & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Представим его в виде ряда Фурье

$$\varepsilon_{ik}(z) = \sum_n \varepsilon_{ik,\,n} e^{i\frac{2\pi n}{l}z}, \quad \varepsilon_{ik,\,n} = \begin{pmatrix} \varepsilon_n & -ig_n & 0 \\ ig_n & \varepsilon_n & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3n} \end{pmatrix} \tag{2}$$

и обозначим переменную часть $\varepsilon_{ik}(z)$ через $\varepsilon'_{ik}(z)$

$$\varepsilon'_{ik}(z) = \sum_{n \neq 0} \varepsilon_{ik,\,n}\, e^{i\frac{2\pi n}{l}z}. \tag{3}$$

Считая $|\varepsilon'_{ik}| \ll |\varepsilon_{ik,\,0}|$, представим поле $\vec{E}$ и индукцию $\vec{D}$ в виде

$$\begin{gathered} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad \vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{D}', \\ D'_i \simeq \varepsilon_{ik,0}\, E'_k + \varepsilon'_{ik} E_{k,\,0}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\vec{E}_0$ — поле волны, имеющей место при $\varepsilon'_{ik} = 0$, а $\vec{E}'$ — поправка, вызванная наличием неоднородности.

[illegible]

Записав $\vec{E}_0(r, t)$ в виде

$$\vec{E}_0(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{k}, \omega) \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)], \tag{5}$$

для определения $\vec{E}'$ имеем уравнение

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}') - \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\right)\vec{E}' - i\frac{\omega^2}{c^2}\left[\vec{g}_0\vec{E}'\right] - \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_{30} - \varepsilon_0)E'_z\hat{e}_z =$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\sum_{n\neq 0}\left\{\varepsilon_{3n}\vec{E}_0 + \hat{e}_z(\varepsilon_{3n} - \varepsilon_n)E_{0z} + i\left[\vec{g}_n\vec{E}_0\right]\right\}e^{i(\vec{k}_n\vec{z} - \omega t)}, \tag{6}$$

$$\vec{k}_n = \vec{k} + \hat{e}_z\frac{2\pi n}{l}.$$

Решением уравнения (6) является сумма

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t),$$
$$\vec{E}_{1,2}(\vec{r}, t) = \sum_{n\neq 0}\vec{A}_{1,2n}\exp[i(\vec{k}_{1,2n}\vec{r} - \omega t)]. \tag{7}$$

Поле $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ является вынужденным решением уравнения (6) и представляет собой рассеянное на неоднородностях поле основной гармоники $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$. Его волновой вектор определяется как $\vec{k}_{1n} = \vec{k} + \hat{e}_z\frac{2\pi n}{l}$, причем $\vec{k}$ удовлетворяет обычному дисперсионному уравнению для гиротропной анизотропной среды

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\right)\left[\frac{\varepsilon_{30}}{\varepsilon_0}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\right) + \varkappa^2\left(1 - \frac{\varepsilon_{30}}{\varepsilon_0}\right)\right] +$$
$$+ \frac{g_0^2}{\varepsilon_0^2}\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\left(\varkappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{30}\right) = 0, \quad \vec{k} = \vec{k}(\vec{\varkappa}, k_z). \tag{8}$$

Амплитуды $\vec{A}_{1n}$ определяются правой частью уравнения (6). Поле $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ является свободным решением уравнения (6), и амплитуды его гармоник $\vec{A}_{2n}$ определяются граничными и начальными условиями.

Из условия существования этого решения для $\vec{k}_{2n}$ получается дисперсионное уравнение

$$\left(k_{2n}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\right)\left(\varkappa_{2n}^2 + \frac{\varepsilon_{30}}{\varepsilon_0}k_{2z,n}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{30}\right) + \frac{g_0^2}{\varepsilon_0^2}\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\left(\varkappa_{2n}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{30}\right) = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим его для двух крайних случаев, когда $\varepsilon_{30} \approx \varepsilon_0$ (существует только гиротропия) и $g_0 \approx 0$ (существует только анизотропия).

В первом случае имеем (при $g_0/\varepsilon_0 \ll 1$)

$$k_{2n}^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 \pm \frac{g_0}{\varepsilon_0}\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\,k_{2z,n}, \tag{10}$$

где знаки $\pm$ соответствуют волнам правой и левой поляризации.

Во втором случае получаются дисперсионные уравнения для высших гармоник обыкновенных и необыкновенных волн в анизотропных периодически-неоднородных средах

$$\left(k_{2n}'^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\right) = 0,$$

$$\left(\varkappa_{2n}'^2 + \frac{\varepsilon_{30}}{\varepsilon_0} k_{2z,n}''^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{30}\right) = 0. \tag{11}$$

2. Рассеяние электромагнитных волн на ограниченном неоднородном диэлектрическом теле при наличии гиротропии и анизотропии

Пусть плоская электромагнитная волна падает на грань $z=-d$ плоскопараллельной пластинки $(-d, d)$ из анизотропного гиротропного диэлектрика, имеющего кристаллическую структуру. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика имеет вид

$$\varepsilon_{ik}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \varepsilon_{ik}(x + l_1, y + l_2, z + l_3). \tag{12}$$

Записав поле падающей волны как

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_\omega \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)], \tag{13}$$

разложим $\varepsilon_{ik}(x, y, z)$ в ряд по векторам обратной решетки $\vec{\tau}$

$$\varepsilon_{ik}(x, y, z) = \varepsilon_{ik,0} + \sum_{\tau \neq 0} a_{ik,\tau} e^{i\vec{\tau}\vec{r}},$$

$$\vec{\tau} = 2\pi\left(\frac{n}{l_1}\hat{e}_x + \frac{m}{l_2}\hat{e}_y + \frac{p}{l_3}\hat{e}_z\right) = \vec{b} + \tau_z \vec{e}_z. \tag{14}$$

Обозначив рассеянное поле через $\vec{E}'$, для его определения имеем уравнение

$$\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}') - \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E}'\right]_i =$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\sum_\tau \int (\sigma_\tau)_{ik} E_k e^{i[\varkappa_b \rho + (k_z + \alpha) z - \omega t]} d\alpha, \tag{15}$$

где

$$\sigma_{ik,0} = \frac{\varepsilon_{ik,0} - \delta_{ik}}{\pi} \frac{\sin(\alpha d)}{\alpha},$$

$$\sigma_{ik,\tau} = \frac{a_{ik,\tau}}{\pi} \frac{\sin[(\alpha - \tau_z) d]}{\alpha - \tau_z}, \quad \tau \neq 0, \tag{16}$$

$$\vec{\varkappa}_b = \vec{\varkappa} + \vec{b},$$

δ_{ik} — символ Кронекера.

Поле $\vec{E}'(\vec{r}, t)$ имеет вид

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \sum_{\tau} \int \frac{\vec{A}_{\tau}(\alpha)}{(k_z + \alpha)^2 - \lambda_b^2} e^{i[(k_z + \alpha) z + \vec{\varkappa}_b \vec{\rho} - \omega t]} d\alpha, \tag{17}$$

где

$$\lambda_b^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa_b^2,$$

$$A_{\tau, i} = \frac{\omega^2}{c^2} \sigma_{\tau, ik} E_k - \tilde{k}_i (\tilde{k}_i \sigma_{\tau, ik} E_k), \tag{18}$$

$$\vec{\tilde{k}} = \hat{e}_z (k_z + \alpha) + \vec{\varkappa}_b.$$

После интегрирования по α для рассеянных назад и вперед волн мы получим следующее выражение:

$$\vec{E}'_{1,2} = \sum_{\tau} \frac{(\pm i\pi) \vec{A}(\alpha_{1,2})}{\lambda_b} e^{i[\pm\lambda_b z + \vec{\varkappa}_b \vec{\rho} - \omega t]},$$

$$\alpha_{1,2} = -k_z \mp \lambda_b. \tag{19}$$

Индексы 1, 2 относятся к полям в областях $z<d$ и $z>d$. Коэффициенты $\sigma_{\tau, ik}$ определяют влияние анизотропии и гиротропии среды на свойства рассеянного излучения, а также угловое распределение его интенсивности.

3. Рассеяние электромагнитных волн на ограниченном в пространстве кристаллическом теле

Пусть диэлектрик, характеризующийся тензором диэлектрической проницаемости (12), занимает объем V и на нем рассеивается волна (13). Представив ε_{ik} в виде (12), для поля рассеянной волны получим

$$E'_i = \sum_{\tau} \int \frac{F_{i\tau}}{\vec{\alpha}(\vec{\alpha} + 2\vec{k})} e^{i(\vec{k}_\alpha \vec{r} - \omega t)} d\vec{\alpha}, \tag{20}$$

$$F_{i\tau} = \frac{\omega^2}{c^2} \sigma_{\tau, ik} E_k - k_{\alpha, i} (k_{\alpha, i} \sigma_{\tau, ik} E_k),$$

$$\vec{k}_\alpha = \vec{k} + \vec{\alpha},$$

где $\sigma_{\tau, ik}$ определяется из преобразований

$$\sigma_{0, ik} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V (\varepsilon_{ik, 0} - \delta_{ik}) e^{-i\vec{\alpha}\vec{r}} d\vec{r}, \tag{21}$$

$$\sigma_{\tau, ik} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V a_{ik, \tau} e^{i(\vec{\tau} - \vec{\alpha})\vec{r}} d\vec{r}.$$

Интегрирование по $\vec{\alpha}$ дает нам следующие значения рассеянных полей на больших расстояниях от рассеивающего тела:

$$E_i' = \frac{2\pi^2}{R} \sum_{\tau} \sigma_{\tau,\, ik}(\vec{\alpha}_0)\, e^{i\left(\frac{\omega}{c}R - \omega t\right)} F_{i\tau}(\vec{\alpha}_0), \tag{22}$$

где

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = R\cos\theta,$$
$$\vec{\alpha}_0 = \vec{k}' - \vec{k}. \tag{23}$$

Конкретизируя свойства $\varepsilon_{ik}(x, y, z)$, размеры и форму тела, из (21)—(22) можно получить все свойства излучения, рассеянного на рассматриваемых телах (например, можно получить свойства коротковолнового излучения, рассеянного на кристаллах [2], исследовать дифракцию на анизотропных преломляющих решетках и т. д.).

Поступила 13.II.1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии, ГИФМЛ, 1965.
2. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Электродинамика сплошных сред, М., 1957.

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԻՐՈՏՐՈՊ ԵՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ

Հ. Ս. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ, Ա. Ռ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ստացված են մոտավոր դիսպերսիոն արտահայտություններ էլեկտրամագնիսական ալիքների համար, որոնք տարածվում են ոչ համասեռ հիրոտրոպ և անիզոտրոպ միջավայրերում: Բարակ թիթեղով անցնող ալիքների ամպլիտուդների և անկյունային բաշխման համար ստացված են համապատասխան արտահայտություններ: Ստացված եզրակացությունները ընդհանրացված են անիզոտրոպ միջավայրի համար, որը ունի վերջավոր չափսեր:

ELECTROMAGNETIC WAVES IN GIROTROPIC AND ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS MEDIA

H. S. MERGELYAN, A. R. MKRTCHYAN

Approximate dispersion relations for electromagnetic waves, propagating in girotropic and a periodically-inhomogeneous anisotropic medium are obtained. For waves, passing through thin anisotropic plate, expressions for amplitudes and the angular distribution of the maxima of scattered radiation are obtained. The result is generalized for the case of nonisotropic substance limited in space.