Изв. АН Армянской ССР, Физика, 9, 463—470 (1974)

ПОЛЯ И ВОЛНЫ В П-ВОЛНОВОДЕ

Г. И. МАРИНОСЯН

Мембранные уравнения для магнитных и электрических волн регулярного П-волновода сводятся к интегральным уравнениям, решение которых ищется методом Галеркина. Учет особенности поля вблизи края гребня волновода позволяет получить быстросходящиеся выражения для полей и критических частот. Приведены результаты численного расчета собственных чисел первых 35 высших видов волн магнитного и электрического типа.

Точность конечных результатов известных методов расчета регулярных П- и Н-волноводов [1, 2] существенно зависит от числа учитываемых гармоник в области над гребнем волновода, т. е. от порядка вычисляемого определителя. Учет большого числа гармоник повышает точность конечных результатов и позволяет удовлетворить естественному граничному условию на краю гребня, однако вычисления становятся очень громоздкими. Ниже предлагается иной метод расчета, в котором особенность поля на краю гребня непосредственно вводится в решение соответствующего интегрального уравнения. Это позволяет получить решение в виде определителя, порядок которого не зависит от числа гармоник в области над гребнем волновода, и одновременно повысить точность конечных результатов.

Рассмотрим регулярный, идеально проводящий П-волновод, поперечное сечение которого изображено на рис. 1. Ввиду симметрии се-

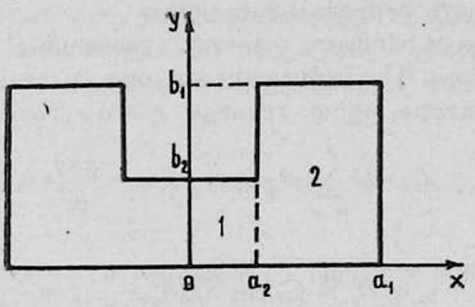

Рис. 1.

чения ограничимся рассмотрением Г-образной области, определив дополнительные граничные условия на оси y введением магнитной либо электрической стенки.

Магнитные волны

Представим поля волн типа H в таком виде

$$\vec{E}_s = \vec{F}(x, y)\,\varphi_H, \quad \vec{H} = \vec{H}_s + \vec{H}_z = \vec{G}(x, y) + \vec{\psi}(x, y).$$

Здесь индексом s обозначены поперечные компоненты поля, индексом

z — продольные, $\vec{F}$, $\vec{G}$ и $\vec{\psi}$ — собственные векторные функции П-волновода, характеризующие распределение поля по координатам поперечного сечения, $\rho_H = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$ — волновое сопротивление, γ — постоянная распространения в волноводе. Зависимость всех составляющих поля от времени и координаты z описывается множителем $\exp(j\omega t - \gamma z)$, который опускаем.

Введем в рассмотрение скалярную функцию ψ, являющуюся решением мембранного уравнения

$$\nabla^2\psi + k_c^2\psi = 0 \tag{1}$$

и удовлетворяющую граничному условию $\frac{d\psi}{dn} = 0$ на контуре поперечного сечения волновода. Тогда собственные функции будут связаны с функцией ψ соотношениями

$$\vec{F} = \left[\vec{G}\vec{z}^0\right], \quad \vec{G} = -\frac{\gamma}{k_c^2}\operatorname{grad}\psi, \quad \vec{\psi} = \psi\vec{z}^0,$$

где k_c — собственное волновое число П-волновода.

Найдем решение уравнения (1).

1. *Несимметричные волны.* Полагая, что по оси y имеется магнитная стенка, граничные условия для Г-образной области будут:

$$\frac{d\psi}{\partial n} = 0 \text{ на металле, } \psi = 0 \text{ на линии } x = 0. \tag{2}$$

Разделим Г-область вертикальной линией $x = a_2$ на простые прямоугольные области и запишем решения уравнения (1) в этих областях в виде ряда Фурье. Потребуем, чтобы они удовлетворяли условиям (2) всюду на контуре, кроме границы $x = a_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_1 &= D\sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin r_m x \cos\frac{m\pi y}{b_2}, \\ \psi_2 &= D\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos S_n (a_1 - x)\cos\frac{n\pi y}{b_1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь D — множитель, определяющий интенсивность поля, r_m и S_n — коэффициенты, характеризующие распределение поля вдоль оси x,

$$r_m = \begin{cases} \sqrt{k_c^2 - \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2}, \\ -j\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2 - k_c^2}, \end{cases} \quad S_n = \begin{cases} \sqrt{k_c^2 - \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2}, \\ -j\sqrt{\left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2 - k_c^2}, \end{cases} \tag{4}$$

A_m и C_n — неизвестные пока коэффициенты, определяемые из условия непрерывности частных решений на общей границе,

$$\psi_1(a_2,\ y) = \psi_2(a_2,\ y), \tag{5а}$$

$$\frac{d\psi_1}{dx} = \frac{d\psi_2}{dx} = E(y), \tag{5б}$$

где $E(y)$ — некоторая функция, характеризующая зависимость y-составляющей электрического поля от координаты y.

Подставляя выражения (3) в равенства (5а) и (5б) и решая их совместно, получим интегральное уравнение

$$\int_0^{b_2} E(y)\, P(y,\ y')\, dy = 0 \tag{6}$$

с симметричным ядром

$$P(y,\ y') = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} r_m a_2}{r_m b_2 \varepsilon_m} \cos\frac{m\pi y}{b_2} \cos\frac{m\pi y'}{b_2} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} S_n (a_1 - a_2)}{S_n b_1 \varepsilon_n} \cos\frac{n\pi y}{b_1} \cos\frac{n\pi y'}{b_1}, \tag{7}$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = \frac{1}{2}$ при $m \neq 0$.

Приближенное решение (6) согласно методу Галеркина представим в виде

$$E(y) = \sum_{i=0}^{L} \alpha_i E_i(y), \tag{8}$$

где $E_i(y)$ — некоторые функции, образующие полную систему при $i = 0,\ 1,\ 2, \cdots$, и удовлетворяющие граничным условиям на концах интервала $(0,\ b_2)$, α_i — постоянные коэффициенты, определяемые из системы уравнений

$$\int_0^{b_2} \left\{ \int_0^{b_2} \sum_{i=0}^{L} \alpha_i E_i(y')\, P(y,\ y')\, dy' \right\} E_j(y)\, dy = 0, \quad j = 0,\ 1,\ 2, \cdots L. \tag{9}$$

Для получения быстросходящегося решения при выборе функций E_i будем исходить из известных заранее свойств поля $E(y)$. Поскольку в окрестности вершины прямого угла поле имеет особенность вида $r^{-1/3}$ [3] (r — расстояние от вершины прямого угла до точки наблюдения), будем искать приближенное решение в таком виде

$$E(y) = (b_2 - y)^{-1/3} \sum_{i=0}^{L} \alpha_i \cos\frac{i\pi y}{b_2}. \tag{10}$$

Подставив его в систему уравнений (9) и воспользовавшись приближением $(1-y)^{2/3} \simeq (1-y)\left(2 - \cos\frac{\pi y}{2}\right)$, окончательно получим

$$\sum_{i=0}^{L} \alpha_i M_{ij} = 0, \quad j = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ L, \tag{11}$$

где

$$M_{ij}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\operatorname{tg} r_m a_2}{r_m b_2 \varepsilon_m}[T(i+m)+T(i-m)][T(j+m)+T(j-m)]-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ctg} S_n(a_1-a_2)}{S_n b_1 \varepsilon_n}\left[T\left(i+n\frac{b_2}{b_1}\right)+T\left(i-n\frac{b_2}{b_1}\right)\right]\left[T\left(j+n\frac{b_2}{b_1}\right)+\right.$$

$$\left.+T\left(j-n\frac{b_2}{b_1}\right)\right], \qquad (12)$$

$$T(u)=2b_2^{2/3}\left\{\frac{\sin u\pi}{u\pi}-\frac{1}{2}+\frac{2u^2}{4u^2-1}\left[1+\frac{4\cos u\pi}{\pi(4u^2-1)}\right]\right\}.$$

Для нетривиального решения необходимо, чтобы определитель системы (11) был равен нулю, т. е.

$$\det|M_{ij}|=0. \qquad (13)$$

Это уравнение является характеристическим для несимметричных H-волн П-волновода. Корни его образуют бесконечную счетную последовательность. Для каждого из них, задаваясь произвольным значением α_0, необходимо из системы уравнений (11) определить значения α_i и далее рассчитать коэффициенты A_m и C_n по следующим формулам:

$$A_m=\frac{1}{r_m b_2 \varepsilon_m \cos r_m a_2}\sum_{i=0}^{L}\alpha_i[T(i+m)+T(i-m)], \qquad (14)$$

$$C_n=\frac{1}{S_n b_1 \varepsilon_n \sin S_n(a_1-a_2)}\sum_{i=0}^{L}\alpha_i\left[T\left(i+n\frac{b_2}{b_1}\right)+T\left(i-n\frac{b_2}{b_2}\right)\right]. \qquad (15)$$

Выражение для нормирующего множителя волны получается из условия нормировки $\int\psi^2 ds=1$ и имеет вид

$$D=\left\{\sum_{m=0}^{\infty}A_m^2 b_2 \varepsilon_m a_2\left(1-\frac{\sin 2r_m a_2}{2r_m a_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2 b_1 \varepsilon_n(a_1-a_2)\left[1+\frac{\sin 2S_n(a_1-a_2)}{2S_n(a_1-a_2)}\right]\right\}^{-1/2}. \qquad (16)$$

Аналогичным образом получаются решения для других типов волн в П-волноводе. Ниже приведены конечные результаты.

2. *Симметричные волны.*

$$\psi_1=D\sum_{m=0}^{\infty}B_m\cos r_m x\cos\frac{m\pi y}{b_2},\quad \psi_2=D\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos S_n(a_1-x)\cos\frac{n\pi y}{b_1}, \qquad (17)$$

$$M_{ij}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ctg} r_m a_2}{r_m b_2 \varepsilon_m}[T(i+m)+T(i-m)][T(j+m)+T(j-m)]+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ctg} S_n(a_1-a_2)}{S_n b_1 \varepsilon_n}\left[T\left(i+n\frac{b_2}{b_1}\right)+T\left(i-n\frac{b_2}{b_1}\right)\right]\left[T\left(j+n\frac{b_2}{b_1}\right)+\right.$$

$$\left.+T\left(j-n\frac{b_2}{b_1}\right)\right], \qquad (18)$$

$$B_m = -\frac{1}{r_m b_2 \varepsilon_m \sin r_m a_2} \sum_{i=0}^{L} \alpha_i [T(i+m) + T(i-m)], \qquad (19)$$

$$C_n = \frac{1}{S_n b_1 \varepsilon_n \sin S_n (a_1 - a_2)} \sum_{i=0}^{L} \alpha_i \left[T\left(i + n\frac{b_2}{b_1}\right) + T\left(i - n\frac{b_2}{b_1}\right)\right], \qquad (20)$$

$$D = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} B_m^2 b_2 \varepsilon_m a_2 \left(1 + \frac{\sin 2 r_m a_2}{2 r_m a_2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 b_1 \varepsilon_n (a_1 - a_2) \left[1 + \frac{\sin 2 S_n (a_1 - a_2)}{2 S_n (a_1 - a_2)}\right]\right\}^{-1/2}. \qquad (21)$$

Электрические волны

Для волн типа E поля в волноводе представим в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_z = \vec{F}(x, y) + \vec{\varphi}(x, y), \quad \vec{H}_s = \frac{1}{\rho_E} \vec{G}(x, y),$$

где $\rho_E = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}$ — волновое сопротивление.

Здесь собственные функции связаны соотношениями

$$\vec{F} = -\frac{\gamma}{k_c^2} \operatorname{grad} \varphi, \quad \vec{G} = \left[\vec{z}^0 \vec{F}\right], \quad \vec{\varphi} = \varphi \vec{z}^0,$$

где φ есть решение мембранного уравнения

$$\nabla^2 \varphi + k_c^2 \varphi = 0 \qquad (22)$$

при граничном условии $\varphi = 0$ на контуре поперечного сечения волновода. Уравнение (22) решается аналогично уравнению (1) с той лишь разницей, что для соответствующего интегрального уравнения решение ищется в виде

$$E(y) = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i (b_2 - y)^{-1/3} \sin \frac{i\pi y}{b^6}. \qquad (23)$$

3. *Несимметричные волны.*

$$\varphi_1 = D \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin r_m x \sin \frac{m\pi y}{b_2}, \quad \varphi_2 = D \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin S_n (a_1 - x) \sin \frac{n\pi y}{b_1}, \qquad (24)$$

$$M_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} r_m a_2}{r_m b_2} [T(i-m) - T(i+m)] [T(j-m) - T(j+m)] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} S_n (a_1 - a_2)}{S_n b_1} \left[T\left(i - n\frac{b_2}{b_1}\right) - T\left(i + n\frac{b_2}{b_1}\right)\right] \left[T\left(j - n\frac{b_2}{b_1}\right) - \right. \qquad (25)$$

$$\left. - T\left(j + n\frac{b_2}{b_1}\right)\right],$$

$$A_m = \frac{1}{r_m b_2 \cos r_m a_2} \sum_{i=1}^{L} \alpha_i [T(i-m) - T(i+m)], \tag{26}$$

$$C_n = \frac{1}{S_n b_1 \cos S_n (a_1 - a_2)} \sum_{i=1}^{L} \alpha_i \left| T\left(i - n\frac{b_2}{b_1}\right) - T\left(i + n\frac{b_2}{b_1}\right) \right|, \tag{27}$$

$$D = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 b_2 a_2 \left(1 - \frac{\sin 2 r_m a_2}{2 r_m a_2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 b_1 (a_1 - a_2) \left| 1 - \frac{\sin 2 S_n (a_1 - a_2)}{2 S_n (a_1 - a_2)} \right| \right\}^{-1/2}. \tag{28}$$

4. *Симметричные волны.*

$$\varphi_1 = D \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos r_m x \sin \frac{m\pi y}{b_2}, \quad \varphi_2 = D \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin S_n (a_1 - x) \sin \frac{n\pi y}{b_1}, \tag{29}$$

$$M_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} r_m a_2}{r_m b_2} [T(i-m) - T(i+m)][T(j-m) - T(j+m)] -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} S_n (a_1 - a_2)}{S_n b_1} \left| T\left(i - n\frac{b_2}{b_1}\right) - T\left(i + n\frac{b_2}{b_1}\right) \right| \left[T\left(j - n\frac{b_2}{b_1}\right) - \right.$$

$$\left. - T\left(j + n\frac{b_2}{b_1}\right) \right], \tag{30}$$

$$B_m = \frac{1}{r_m b_2 \sin r_m a_2} \sum_{i=1}^{L} \alpha_i [T(i-m) - T(i+m)], \tag{31}$$

$$C_n = \frac{1}{S_n b_1 \cos S_n (a_1 - a_2)} \sum_{i=1}^{L} \alpha_i \left| T\left(i - n\frac{b_2}{b_1}\right) - T\left(i + n\frac{b_2}{b_1}\right) \right|, \tag{32}$$

$$D = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2 b_2 a_2 \left(1 + \frac{\sin 2 r_m a_2}{2 r_m a_2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 b_1 (a_1 - a_2) \left| 1 - \frac{\sin 2 S_n (a_1 - a_2)}{2 S_n (a_1 - a_2)} \right| \right\}^{-1/2}. \tag{33}$$

Численное решение

Решение нелинейного уравнения (13) возможно только численными методами. Оно может быть существенно упрощено, если сначала решать ее в приближении низкого порядка. При выборе метода решения необходимо принять во внимание наличие сингулярностей функции $\det |M_{ij}|$, так как их наличие создает вычислительные трудности для большинства стандартных программ поиска корней. Следует также иметь в виду, что между определенными сингулярностями ну-

лей может не быть, тогда как между двумя другими их может быть несколько.

С учетом этих замечаний на ЭВМ были рассчитаны собственные числа, коэффициенты α_i и D первых 35 высших видов волн в П-волноводе с размерами $a_1 = 1{,}31$ *см*, $a_2 = 0{,}204$ *см*, $b_1 = 1{,}18$ *см* и $b_2 = 0{,}49$ *см*. Результаты расчетов, полученные в приближении $L = 2$, $M = N = 50$, приведены для всех четырех типов волн соответственно в табл. 1—4. Точность результатов не хуже 0,25%. В приближении

Таблица 1

ν	$k_{c\nu}$	α_0	α_1	α_2	D
1	0,825415	1	0,15849	—0,08698	0,45773
2	2,7292	1	1,41588	—0,55555	0,22261
3	3,1711	1	0,26303	—0,11924	0,82710
4	4,2164	1	0,58961	—0,26113	1,18747
5	5,3973	1	2,81263	—0,42709	0,25895
6	5,7943	1	0,20779	—0,07943	0,60667
7	6,1650	1	4,85075	—0,64301	0,20455
8	6,4397	1	1,08002	—0,37408	0,91408
9	7,8535	1	3,51473	—2,31584	0,16768

Таблица 2

ν	$k_{c\nu}$	α_0	α_1	α_2	D
1	2,4160	1	1,00411	—4,44533	1,06187
2	2,7477	1	0,82611	—4,43194	0,41426
3	3,6336	1	72,4077	—438,38	0,0131
4	5,0202	1	0,09473	8,80317	0,65915
5	5,3758	1	—20,8443	—378,23	0,00657
6	5,9796	1	0,77235	1,61646	0,85559
7	6,0875	1	1,01869	4,55336	0,66473
8	7,2838	1	—0,36252	—0,66393	2,54839
9	7,4626	1	—1,17924	—1,02088	1,45185

Таблица 3

ν	$k_{c\nu}$	α_1	α_2	D
1	3,2836	1	—0,69733	1,36371
2	5,1468	1	—1,35965	0,72980
3	5,7779	1	—0,25280	2,39802
4	7,0034	1	—0,19296	2,13602
5	7,7203	1	—0,93055	1,47504
6	8,3029	1	—1,72917	2,97825
7	8,9626	1	—0,89043	0,99305
8	9,1280	1	0,89696	1,53231

Таблица 4

ν	$k_{c\nu}$	α_1	α_2	D
1	3,2544	1	—0,99559	1,48894
2	5,1284	1	—2,69061	0,59632
3	5,6463	1	—0,87983	1,35071
4	6,7619	1	0,78255	1,57321
5	7,4571	1	0,36447	3,93077
6	8,0042	1	—0,50445	3,77119
7	8,4561	1	0,24342	6,68246
8	9,0365	1	—1,43325	1,288207
9	9,7255	1	0,20839	11,2395

$L = 0$, $M = N = 25$ расчет по формуле (13) для основной волны данного П-волновода приводит к значению $k_c = 0{,}822$, тогда как метод неопределенных коэффициентов [1] в том же приближении дает $k_c = 0{,}816$. Наиболее точное значение $k_c = 0{,}827$ [4].

Результаты сшивания функций ψ_1 и ψ_2, рассчитанные в том же приближении по фурмулам (3), показали, что ошибка сшивания не превосходит 15%, тогда как аналогичные формулы работ [1, 2] приводят к 60% ошибке.

Институт радиофизики и электроники
АН АрмССР

Поступила 10.III.1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. М. Седых, В. М. Дмитриев, Н. В. Ляпунов.* Вопросы радиоэлектроники, сер. XII, вып. 17, 55 (1959).
2. *J. R. Monthgomery.* Trans. IEEE, MTT—19, 547 (1971).
3. *Л. Н. Дерюгин.* Радиотехника, 3, 49 (1948).
4. *J. R. Pyle.* Trans. IEEE, MTT—14, 175 (1966).

ԴԱՇՏԵՐԸ ԵՎ ԱԼԻՔՆԵՐԸ Π-ՏԻՊԻ ԱԼԻՔԱՏԱՐՈՒՄ

Գ. Ի. ՄԱՐԻՆՈՍՅԱՆ

Մեմբրանային հավասարումները մագնիսական և էլեկտրական ալիքների համար բերվում են ինտեգրալային հավասարումների, որոնց լուծումը փնտրվում է Գալերկինի մեթոդով։ Ալիքատարի սանրի եղրի մոտակայքում դաշտի սահմանահատակության հաշվառումը թույլ է տալիս ստանալ արագ զուգամիտող արտահայտություններ դաշտերի և կրիտիկական հաճախությունների համար։ Բերված են մագնիսական և էլեկտրական դաշտերի առաջին 35 բարձր կարգի ալիքների թվային հաշվարկման արդյունքները։

FIELDS AND WAVES IN RIDGED WAVEGUIDE

G. I. MARINOSSYAN

The complete solution of the ridged waveguide eigenvalue problem is presented. The solution is obtained by the formulation of an integral eigenvalue equation which is subsequently solved numerically by the application of Galerkin method. As an illustration we give the results of the numerical computation of first 35 higher mode eigenvalues.