

ТЕОРИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУР В СТАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

Г. М. АВАКЬЯНЦ, Г. С. КАРАЯН, А. А. ДЖЕРЕДЖЯН

Выполнен расчет статической вольт-амперной характеристики многослойных структур, когда число чередующихся слоев p - и n -типа произвольно. Доказан ряд теорем, которые помогают исследовать различные свойства вольт-амперной характеристики (ВАХ) структуры. В примерах проанализированы некоторые механизмы образования участка отрицательного дифференциального сопротивления (ОС) на ВАХ k -го обратнотемперного p - n -перехода.

Существующие работы [1—9] изучают многослойные структуры, число переходов в которых не превосходит пяти. В [10] рассмотрены супермногослойные структуры, когда пренебрегается влиянием крайних контактов. Методика расчета [9, 10] основана на теории многотранзисторной аналогии (МТА), которая, как известно [8], в общем случае не верна. В настоящей статье изложена теория многослойных структур для произвольного числа слоев.

Рассмотрим структуру, представленную на рисунке. Решая диффузионное уравнение с учетом отклонения от распределения Больцмана у границ коллекторов и закона Кирхгофа [5—8], в силу постоянства полного тока через любое сечение образца для плотностей тока через p - n -переходы можно написать (обозначения см. в [5, 6]).

$$J = i_k (\xi_k - 1) + \beta_k i_k (1 - \xi_{k-1}) + \beta_{k+1} i_k (1 - \xi_{k+1}) + I_k \xi_k^{1/2} + V_k / r_k S, \quad (1)$$

если k -й переход эмиттерный,

$$J = \beta_k i_{k-1} (\xi_{k-1} - 1) + \beta_{k+1} i_k (\xi_{k+1} - 1) + \theta_k (1 - \xi_k) + I_k + m_k J + (1 - m_k) V_k / r_k S, \quad (2)$$

если k -й переход коллекторный.

В случае, когда базы низкоомные и относительно короткие, при низком уровне инжекции верно равенство

$$V(J) = \sum_{k=1}^N V_k(J). \quad (3)$$

Формулы (1)—(3) описывают ВАХ структуры в параметрической форме.

Исследование алгебраической системы уравнений (1), (2) относительно неизвестных $V_k(J)$ без ЭВМ крайне затруднительно, поэтому рассматриваемую систему будем изучать с помощью дифференциальных сопротивлений (ДС) p - n -переходов.

Для удобства перейдем к безразмерным величинам: плотности токов будем измерять в единицах $(\max_k i_k)$, напряжение — в $\frac{kT}{e}$, сопротивление — в $kT/e (\max_k i_k)$, причем обозначения величин оставим прежними.

Дифференцируя (1) и (2) по j , получим

$$\alpha_j^i R_j = d_i, \quad (4)$$

где $R_k = \frac{dV_k}{dJ}$ — дифференциальное сопротивление k -го перехода,

$$d_k = \begin{cases} 1 & \text{если } k \text{ — нечетное} \\ 1 - m_k & \text{если } k \text{ — четное,} \end{cases}$$

$$\alpha_k^j = \begin{cases} i_k \xi_k + \partial_k \xi_k^{1/2} / 2 + r_k^{-1} S^{-1} & j = k, \text{ если } k \text{ — нечетное} \\ \beta_k i_k \xi_{k-1} & j = k-1 \quad " \\ \beta_{k+1} i_k \xi_{k+1} & j = k+1 \quad " \\ m'_k J + J'_k + \theta_k \xi_k + r_k^{-1} (1 - m_k - V_k m'_k) S^{-1} & j = k, \text{ если } k \text{ — четное (5)} \\ \beta_k i_{k-1} \xi_{k-1} & j = k-1 \quad " \\ \beta_{k+1} i_{k+1} \xi_{k+1} & j = k+1 \quad " \\ 0 & j \neq k-1, k, k+1, \end{cases}$$

где все индексы пробегает значения $1, 2, \dots, N$. В (4) по верхним и нижним повторяющимся индексам производится суммирование.

Физически ясно, что каждый p - n -переход имеет ДС, которые по формуле

$$R = \sum_{i=1}^{N-1} R_i \quad (6)$$

определяют полное ДС структуры. Поэтому если наше приближение корректно, то система уравнений (4) должна иметь решения при всех N . Кроме того, если доказать существование решений системы уравнений (4), то можно пользоваться разными приближенными методами для нахождения этих решений. С этой целью докажем теорему.

Теорема 1. Для всех N матрица, определенная формулой (5), обратима.

Доказательство. Докажем, что

$$\det \{ \alpha_i^j \} \neq 0.$$

Обозначим

$$\bar{a}^k = a^k - a^{k-1} a^{k-1} / \bar{a}^{k-1}. \quad (7)$$

Из неравенства $\beta_{2k+1} + \beta_{2k+2} < 1$ вытекает, что

$$a_{2k+1}^{2k+1} > a_{2k}^{2k+1} + a_{2k+2}^{2k+1}, \quad (8)$$

$$a_{2k}^{2k} > a_{2k-1}^{2k} \operatorname{ch} \gamma_{2k} + a_{2k+1}^{2k} \operatorname{ch} \gamma_{2k+1}. \quad (9)$$

Последние неравенства являются следствием того, что инжекционный ток через k -й переход при нечетном k меньше, чем полный ток.

Методом математической индукции докажем, что имеет место неравенство

$$\operatorname{ch} \gamma_{2k} > a_{2k}^{2k-1} / a_{2k-1}^{2k-1}. \quad (10)$$

Очевидно, что при $k=1, 2$ условие (9) выполняется; достаточно доказать, что из (9) следует неравенство

$$\operatorname{ch} \gamma_{2k+2} > a_{2k+2}^{2k+1} / a_{2k+1}^{2k+1}. \quad (11)$$

Из (7) и (10) легко получить

$$\bar{a}_{2k}^{2k} > a_{2k+1}^{2k} \operatorname{ch} \gamma_{2k+1} \quad (12)$$

и

$$\bar{a}_{2k+1}^{2k+1} = a_{2k+1}^{2k+1} - a_{2k+1}^{2k} a_{2k}^{2k+1} / \bar{a}_{2k}^{2k} > a_{2k+1}^{2k+1} - a_{2k}^{2k+1} / \operatorname{ch} \gamma_{2k+1} > 0. \quad (13)$$

Последнее неравенство является результатом неравенства (8).

Рассмотрим неравенство

$$\operatorname{ch} \gamma_{2k+2} - a_{2k+2}^{2k+1} / a_{2k+1}^{2k+1} > \operatorname{ch} \gamma_{2k+2} - a_{2k+2}^{2k+1} \operatorname{ch} \gamma_{2k} / (a_{2k+1}^{2k+1} \operatorname{ch} \gamma_{2k} - a_{2k}^{2k+1}).$$

После простых преобразований получим, что левая часть этого выражения положительна, если положительна разность

$$\operatorname{ch} \gamma_{2k+1} \operatorname{ch} \gamma_{2k+2} a_{2k+1}^{2k+2} - a_{2k+1}^{2k+2} \operatorname{ch} \gamma_{2k+1} - a_{2k}^{2k+1} \operatorname{ch} \gamma_{2k+1}.$$

Это видно из (8), поэтому неравенство (10) верно.

Так как из (10) следуют (12) и (13), которые верны для $k=1, 2$, то все $\bar{a}_k^{2k} > 0$. По определению

$$\det \{a_j^i\} = \prod_{i=1}^N \bar{a}_i^{2i} > 0$$

и теорема доказана.

Для дальнейшего исследования ВАХ докажем другую теорему.

Теорема 2. При любом значении плотности тока J решения системы уравнений (4) положительны, если только индекс k — нечетный.

Доказательство. Решения R_k системы (4) можно представить в виде

$$R_k = \frac{\begin{vmatrix} \bar{d}_k & a_k^{k+1} \\ d_{k+1} & \bar{a}_{k+1}^{k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{a}_k^k & a_k^{k+1} \\ a_{k+1}^k & \bar{a}_{k+1}^{k+1} \end{vmatrix}}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_v &= \begin{cases} a_v^v & \text{если } v = N \\ a_v^v - a_v^{v+1} a_{v+1}^v / \bar{a}_{v+1}^{v+1} & \text{если } v \neq N, \end{cases} \\ \bar{d}_v &= \begin{cases} d_v & \text{если } v = N \\ d_v - a_v^{v+1} \bar{d}_{v+1} / \bar{a}_{v+1}^{v+1} & \text{если } v \neq N, \end{cases} \\ \bar{d}_v &= \begin{cases} d_v & \text{если } v = 1 \\ d_v - a_v^{v-1} \bar{d}_{v-1} / \bar{a}_{v-1}^{v-1} & \text{если } v \neq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Для нечетного индекса при неотрицательных значениях R_{k-1} и R_{k+1} непосредственной проверкой можно убедиться, что имеет место неравенство

$$\bar{a}_{k-1}^{k-1} \bar{a}_{k+1}^{k+1} > \bar{a}_{k-1}^{k-1} a_k^{k+1} - \bar{a}_{k-1}^{k-1} a_k^{k-1}. \quad (16)$$

При этом учитывается, что величины $\bar{a}_i$ и $\tilde{a}_i$ положительны. Положительность $\bar{a}_i$ была доказана в теореме 1 (см. (12) и (13)), а положительность $\tilde{a}_i$ можно доказать аналогично.

Покажем теперь, что $\bar{d}_v$ положительны, если v — нечетно. Ясно, что $d_1 > 0$. Пусть $\bar{d}_{v-2} > 0$, тогда

$$\bar{d}_v = 1 - \frac{a_{v-1}^{v-1}}{a_{v-1}^{v-1}} \left(\bar{d}_{v-1} - \frac{a_{v-1}^{v-2}}{a_{v-2}^{v-2}} \bar{d}_{v-2} \right) > 1 - a_{v-1}^{v-1} / \bar{a}_{v-1}^{v-1} > 0. \quad (17)$$

По индукции следует, что $d_v > 0$.

Аналогично доказывается верность неравенства

$$\tilde{d}_{2i+1} > 0. \quad (18)$$

Пусть R_{k-1} и R_{k+1} неотрицательны. Так как знаменатель в (14) положителен (в силу теоремы 1), то знак R_k совпадает со знаком числителя. Преобразуя числитель R_k при помощи (15) и учитывая положительность величин $\bar{d}_{2v+1}$ и $\tilde{d}_{2v+1}$, получим

$$\left| \begin{array}{cc} \bar{d}_k & a_k^{k+1} \\ \tilde{d}_k & \tilde{a}_{k+1}^{k+1} \end{array} \right| > \bar{a}_{k-1}^{k-1} \bar{a}_{k+1}^{k+1} - \bar{a}_{k-1}^{k-1} a_k^{k+1} - \tilde{a}_{k+1}^{k+1} a_k^{k-1}.$$

Правая часть положительна в силу (10), что и подтверждает верность исходной теоремы.

Далее, пусть хотя бы одно R_{k+1} или R_{k-1} (или оба) отрицательно (не уменьшая общности можно считать, что $R_{k-1} < 0$). Неравенство $R_{k-1} < 0$ эквивалентно утверждению

$$\tilde{a}_k^k d_{k-1} < a_{k-1}^{k-1} \tilde{d}_k. \quad (19)$$

Из (14) и (15) ясно, что знак R_k совпадает со знаком следующего выражения

$$\bar{d}_1 + \bar{d}_k - d_k = \bar{d}_k - a_k^{k-1} \bar{d}_{k-1} / \bar{a}_{k-1}^{k-1}. \quad (20)$$

Если $\bar{d}_{k-1} \leq 0$, то в силу положительности $\bar{d}_k$ правая часть равенства (20) положительна. А если $\bar{d}_{k-1} > 0$, то учитывая неравенство (19), получим, что правая часть (20) больше нуля и теорема доказана.

В доказательстве теоремы фигурировали $\tilde{d}_i$ и $\bar{d}_i$ с нечетными индексами (нечетные индексы относятся к прямосмещенному p - n -переходу), которые положительны независимо от того, заканчивается ли структура коллектором или эмиттером.

Легко видеть, что дифференциальные сопротивления коллекторных переходов могут быть знакопеременными.

Обращение в нуль дифференциального сопротивления эквивалентно выполнению соотношения

$$\bar{d}_k + \tilde{d}_k - d_k = 0. \quad (21)$$

Последнее является уравнением относительно напряжений V_k , которые можно исключить при помощи (1) и (2), тогда (21) превращается в уравнение относительно плотности тока. Решая его, найдем значение тока, при котором на k -м коллекторе произойдет срыв.

Как видно из определения $\bar{d}_k$ и $\tilde{d}_k$, (21) может выполняться в разных случаях.

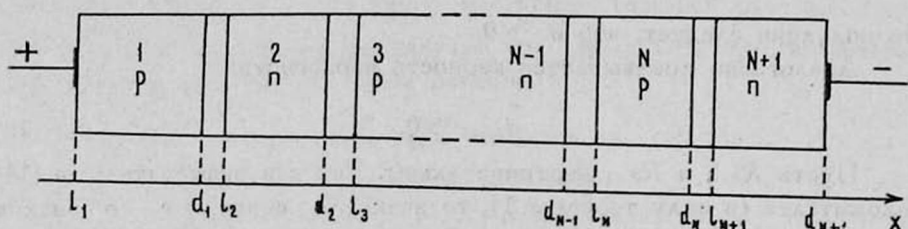


Рис. 1.

Пример 1. Пусть $V_{k-2} \gg 1$, $V_{k+2} \gg 1$; тогда (21) сводится к уравнению

$$1 - m_k - \beta_k (1 + \delta_{k-1} \xi_{k-1}^{-1/2}/2)^{-1} - \beta_{k+1} (1 + \delta_{k+1} \xi_{k+1}^{-1/2}/2)^{-1} = 0. \quad (22)$$

Выражение (22) есть обобщенный случай срыва коллектора p - n - p - n -структуры (или в терминах теории МТА $1 - m_k - \alpha_{k-1}^* - \alpha_{k+1}^* = 0$).

В силу теоремы 2 знаменатель в (22) с ростом тока убывает, поэтому (22) может иметь место и без лавинного умножения в коллекторе (т. е. $m_k = 0$), если только $\beta_k + \beta_{k+1} > 1$. В этом случае срыв k -го перехода обусловлен тепловой генерацией в нем.

Однако при наличии лавинного умножения это условие не является необходимым для ОС. Такая задача рассмотрена в [4, 5] и может быть решена также для p - n - p - n -структуры. Из (22) видно, что при наличии лавинного умножения в коллекторе R_k может быть знакопеременной функцией.

Пример 2. В качестве второго примера возьмем рассмотренный в [6] случай с $\delta_3 = 0$. Формула (21) там имеет вид

$$1 - m_4 - \beta_4 + \frac{a_1^2}{a_2^2} \left(1 - \frac{2\beta_2}{2 + \delta_1 \xi_1^{-1/2}} \right), \quad (23)$$

откуда видно, что на ВАХ четвертого перехода может образоваться ОС за счет утечки первого перехода, если a_2^2 мало, т. е. $V_2 \lesssim 1$, причем выполнение последнего неравенства обеспечивается условием

$\beta_2 + \beta_3 > 1$. Ясно, что для существования ОС на ВАХ четвертого перехода необходимо наличие в нем лавинного умножения.

Пример 3. Пусть $\beta_{k-2} + \beta_{k-1} > 1$, $\beta_{k+2} + \beta_{k+3} > 1$, $V_{k-1}, V_{k+1} \gg 1$, $V_{k-2}, V_{k+2} \lesssim 1$. Тогда из (21) имеем

$$1 - m_k - 2\beta_k [1 - (1 - 2\beta_{k-2}/(2 + \delta_{k-3} \xi_{k-3}^{-1/2})) a_{k-1}^{k-2}/a_{k-2}^{k-2}][2 + \delta_{k-1} \xi_{k-1}^{-1/2}]^{-1} - \\ - \frac{2\beta_{k+1}}{2 + \delta_{k+1} \xi_{k+1}^{-1/2}} \left[1 - \frac{a_{k+1}^{k+2}}{a_{k+2}^{k+2}} \left(1 - \frac{2\xi_{k+3}}{2 + \delta_{k+3} \xi_{k+3}^{-1/2}} \right) \right] = 0, \quad (24)$$

откуда следует, что для срыва k -го перехода необходимо, чтобы хотя бы один из δ_{k-3} , δ_{k-1} , δ_{k+1} и δ_{k+3} не был равен нулю. При этом достаточно выполнение условия $\beta_k + \beta_{k+1} > 1$ или $m_k + \beta_k + \beta_{k+1} > 1$ и т. д.

Из (24) ясно, что R_k может обращаться в нуль, если $m_k = 0$ и $\beta_k + \beta_{k+1} \leq 1$. В этом случае ВАХ k -го перехода при малых остаточных напряжениях не зависит от того, было ли лавинное умножение в этом переходе в случае больших V_k или нет.

Рассмотренные примеры показывают, что ДКП и КУ составных транзисторов растут и тогда, когда в эмиттерном переходе отсутствуют утечки, что не следует из теории МТА. Причиной этого, как выяснилось, является влияние таких p - n -переходов, которые не входят в состав данного транзистора. Следовательно, нельзя КУ и ДКП составных транзисторов МС структур определять только из свойств тех переходов и баз, которые входят в его состав.

Поэтому, чтобы корректно определить эти величины, нужно выписать уравнения для плотности тока через коллекторы и их ДС через КУ и ДКП и сравнить с формулами (2) и (14). В результате получим

$$\alpha_k^{*k+1} = a_k^{k+1} \bar{d}_{k+1}^{k+1} / \bar{a}_{k+1}^{k+1}, \quad \alpha_k^{*k-1} = a_k^{k-1} \bar{d}_{k-1}^{k-1} / \bar{a}_{k-1}^{k-1} \quad (25)$$

и

$$\alpha_k^{*k+1} = \frac{1}{J} \int_0^J \alpha_k^{*k+1} dJ. \quad (26)$$

Соотношения (25) и (26) являются определениями ДКП и КУ $[k, k \pm 1]$ -транзисторов соответственно.

Пусть четные индексы $m \leq l \leq k$ такие, что

$$V_{2i} < 1, \text{ если } 2i \in (m, k), \quad V_m > 1,$$

$$V_{2i} < 0, \text{ если } 2i \in (l, k), \quad V_l > 0.$$

Тогда в силу теорем 1 и 2 получим

$$\alpha_k^{*k-1} \simeq \mu_{k-1} (1 - \mu_{k-2} (1 - \dots (1 - \mu_{m+1}) \dots)) \equiv \alpha_k^{*k-1}(m), \quad (27)$$

$$\alpha_k^{*k-1} \simeq J^{-1} \int_0^J \alpha_k^{*k-1}(l) dJ \simeq \alpha_k^{*k-1}(l). \quad (28)$$

Аналогичные соотношения можно выписать и для α_k^{k+1} и α_k^{*k+1} .

Свойства зависимостей $\alpha_k^{*k-1}(m)$ и $\alpha_k^{k-1}(l)$ от J можно выразить теоремой, которая следует из (27) и (28) при отсутствии ЛУ в k -м переходе.

Теорема 3. а. Для того, чтобы $\alpha_k^{*k-1}(m)$ была монотонно возрастающей функцией (в узком смысле) плотности полного тока J , необходимо и достаточно наличие некоторой утечки (неважно, рекомбинационной или омической) хотя бы в одном эмиттере с номером из (m, k) . В противном случае $\alpha_k^{*k-1}(m)$ является постоянной величиной.

б. Токовая зависимость $\alpha_k^{k-1}(l)$ подобна зависимости функции $\alpha_k^{*k-1}(l)$.

Из теорем 1, 2 и 3 можно получить следующие оценки для КУ и ДКП:

$$\begin{aligned} \max_j \alpha_k^{k-1} &< \mu_{k-1}, \\ \max_j \alpha_k^{*k-1} &< \mu_{k-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Пример 4. Рассчитаем КУ и ДКП составных транзисторов шестислойной структуры с рекомбинационной утечкой только в первом переходе. Из (27) сразу получим при токах, меньших, чем ток ИЗН первого коллектора

$$\alpha_2^{*3} = \beta_3, \quad \alpha_4^{*3} = \beta_4, \quad \alpha_4^{*5} = \beta_5, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2^{*1} &= \beta_2 (1 + \delta/2 \sqrt{\xi_1})^{-1} = \beta_2 (1 - \delta/2 \sqrt{1 + J^2 + \delta^2/4}), \\ \alpha_2^1 &= \beta_2 (J - \delta \sqrt{1 + J^2 + \delta^2/4} + \delta \sqrt{1 + \delta^2/4})/J, \end{aligned} \quad (31)$$

а для остальных КУ имеем $\alpha_j^j = \alpha_j^{*j} = \text{const}$.

Если $\beta_2 + \beta_3 > 1$, то при $J > J_2 \text{ нпв.}$ видоизменяется только α_4^{*3} , а именно

$$\alpha_4^{*3} = \alpha_4^{*3}(2) = \beta_4 (\theta_2 - \beta_2) \left[\theta_4 - \beta_2^2 i_3 - \frac{\beta_2^2}{1 + \delta/(2 + \sqrt{1 + J^2 + \delta^2/4} - \delta)} \right]. \quad (32)$$

Формулы (30) и (31) хорошо согласуются с экспериментом [2].

В (32) α_4^{*3} с током растет благодаря наличию утечки в первом переходе, что не следует из теории МТА.

Выражения (30) и (31) можно получить и по МТА, так как в этом случае взаимодействие несоседних p - n -переходов пренебрежимо мало.

В заключение заметим, что если экспериментально измерить ВАХ многослойной структуры, то можно судить о механизме ЛУ в коллекторах, так как эти механизмы здесь проявляются более явно, чем в случае изолированного перехода.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. L. Moll, R. van Overstratton. Solid State Electronics, 6, 147 (1963).
2. В. А. Кузьмин. Тиристоры малой и средней мощности, Изд. Советское радио, М., 1971.
3. Е. В. Лазарев. Кандидатская диссертация, Ереван, 1969.
4. В. Е. Челноков, В. Б. Шуман, Н. И. Якивич. Радиотехника и электроника, 11, 2217 (1966).
5. Г. М. Авакьянц, Г. С. Караян, А. А. Джереджян. Изв. АН АрмССР, Физика, 7, 44 (1972).
6. Г. М. Авакьянц, Г. С. Караян, А. А. Джереджян. Изв. АН АрмССР, Физика, 7, 435 (1972).
7. Г. М. Авакьянц, Г. С. Караян, А. А. Джереджян. Изв. АН АрмССР, Физика, 8, 54 (1973).
8. Г. М. Авакьянц, Г. С. Караян, А. А. Джереджян. Изв. АН АрмССР, Физика, 8, 205 (1973).
9. А. А. Лебедев. Физика электронно-дырочных переходов и полупроводниковых приборов, Изд. Наука, Л., 1969, стр. 291.
10. В. И. Стафеев. ФТП, 5, 408 (1971).

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ԿԱՌՈՒՅՎԱԾՔՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍՏԱՏԻԿ ՌԵՃԻՄՈՒՄ

Գ. Մ. ԱՎԱԿՅԱՆՑ, Հ. Ս. ԿԱՐԱՅԱՆ, Հ. Հ. ԶԵՐԵԶԻԱՆ

Տեսականորեն քննարկվում է p - n - p ... տիպի բազմաշերտ կիսահաղորդչային կառուցվածքի վոլտ-ամպերային բնութագիծը (ՎԱԲ), որտեղ շերտերի թիվը կամայական է:

Ստացված են յուրաքանչյուր p - n -անցման և լրիվ կառուցվածքի դիֆերենցիալ դիմադրությունները:

Անկախ շերտերի թվից ապացուցվում է թեորեմ, որը ցույց է տալիս, որ էմիտորային անցումների դիֆերենցիալ դիմադրությունները միշտ դրական են, իսկ կոլեկտորային անցումներինը՝ կարող են լինել նաև նշանափոխ ֆունկցիաներ:

THEORY OF MULTILAYER STRUCTURES IN THE STATIC REGIME

G. M. AVAKYANTS, H. S. KARAYAN, H. H. DZHEREDZHIAN

The method of the obtaining of voltage-current characteristic (VCC) of multilayer (ML) p - n - p -type semiconductor structure with an arbitrary number of N layers was analyzed. The differential resistances of each p - n -junction and of the total structure were obtained. Independently of the number of layers N the theorem was proved which showed, that the differential resistances of emitter junctions were always positive while for collector junctions they can be sign-variable functions.