Изв. АН Армянской ССР, Физика, 9, 369—373 (1974)

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ МЕЖДУ ИЗОТРОПНЫМИ ДИЭЛЕКТРИКАМИ

Ю. М. АЙВАЗЯН, О. С. МЕРГЕЛЯН, М. П. ПУЛАТОВ

Решена задача дифракции плоской электромагнитной волны на диэлектрической пластине, помещенной между двумя другими диэлектриками. Диэлектрическая проницаемость пластины периодически зависит от трех координат. Из данного решения можно получить формулы для полей и углового распределения дифрагированных волн для частных случаев кристаллической пластинки и гофрированной по всем координатам диэлектрической поверхности.

1. Пусть плоскости $z=0$ и $z=d$ отделяют изотропные диэлектрики, имеющие диэлектрические проницаемости ε_1 (при $z<0$) и ε_2 (при $z>d$), от диэлектрической пластины с проницаемостью $\varepsilon(x, y, z)=\varepsilon(x+l_1, y+l_2, z+l_3)$ и на грань $z=0$ падает плоская электромагнитная волна частоты ω.

Записав поле падающей волны в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t)=\vec{E}_\omega \exp\{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)\}, \quad k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}, \tag{1}$$

разложим диэлектрическую проницаемость пластины в тройной ряд Фурье

$$\varepsilon(x, y, z)=\varepsilon_0+\sum_{\vec{\tau}\neq 0} a_{\vec{\tau}}\, e^{i\vec{\tau}\vec{r}}=\varepsilon_0+\varepsilon'(x, y, z),$$

$$\vec{\tau}=2\pi\left(\frac{n}{l_1}\hat{n}_x+\frac{m}{l_2}\hat{n}_y+\frac{p}{l_3}\hat{n}_z\right), \tag{2}$$

где n, m и p меняются от $-\infty$ до $+\infty$, а $\hat{n}_{x, y, z}$ — единичные векторы вдоль координатных осей.

Считая $\varepsilon' \ll \varepsilon_0$, применим к решению задачи теорию возмущений. Обозначим через $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$ электрическое поле внутри пластины в нулевом приближении, когда между диэлектриками ε_1 и ε_2 находится изотропный диэлектрик с проницаемостью ε_0. Это поле имеет вид

$$\vec{E}_0(\vec{r}, t)=\{\vec{E}_2(\omega)\, e^{i\lambda_2 z}+\vec{E}_3(\omega)\, e^{-i\lambda_2 z}\}\, e^{i\vec{\varkappa}\vec{\rho}},$$

$$\vec{\varkappa}=\vec{\varkappa}(k_x, k_y), \quad \rho=\rho(x, y), \quad \lambda_2=\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0-\varkappa^2\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Обозначим поправку к $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$, вызванную наличием неоднородностей в пластине, через $\vec{E}'(\vec{r}, t)$, причем в нашем приближении

$$\vec{D}'(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}'(\vec{r}, t) + \varepsilon' \vec{E}_0(\vec{r}, t). \tag{4}$$

Тогда поле $\vec{E}'$ внутри пластины будет подчиняться уравнению [1, 2]

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}') - \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\right)\vec{E}' = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon' \vec{E}_0(\vec{r}, t). \tag{5}$$

Общим решением уравнения (5) является

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{\tau} \neq 0} \Big\{ \vec{A}_{2\vec{\tau}} e^{i(\lambda_2 + \tau_z) z} + \vec{A}_{3\vec{\tau}} e^{i(-\lambda_2 + \tau_z) z} +$$

$$+ \vec{B}_{2\vec{\tau}} e^{i\lambda_{2\vec{\tau}} z} + \vec{B}_{3\vec{\tau}} e^{-i\lambda_{2\vec{\tau}} z} \Big\} e^{i(\vec{\varkappa}_{\vec{\tau}} \vec{\rho} - \omega t)}, \tag{6}$$

$$\vec{\varkappa}_{\vec{\tau}} = \vec{\varkappa} + \frac{2\pi n}{l_1}\vec{n}_x + \frac{2\pi m}{l_2}\vec{n}_y, \quad \lambda_{2\vec{\tau}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 - \varkappa^2_{\vec{\tau}}},$$

где $\vec{A}_{2,3\vec{\tau}}$ — амплитуды вынужденных решений уравнения (5), имеющие вид

$$\vec{A}_{2,3\vec{\tau}} = \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 \vec{E}_{2,3} - (\vec{\tau}\vec{E}_{2,3})(\vec{\tau} + \vec{k}_{2,3})}{\vec{\tau}(\vec{\tau} + 2\vec{k}_{2,3})} \frac{a_{\vec{\tau}}}{\varepsilon_0},$$

$$\vec{k}_{2,3} = \vec{k}_{2,3}(k_x, k_y, \pm\lambda_2), \tag{7}$$

а $\vec{B}_{2,3\vec{\tau}}$ — амплитуды свободных решений уравнения (5), определяемые из граничных условий.

Высшие гармоники отраженных в область $z<0$ и преломленных в область $z>d$ волн имеют вид

$$\vec{E}_{1,4}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{\tau} \neq 0} \vec{E}_{1,4,\vec{\tau}} e^{i(\vec{\varkappa}_{\vec{\tau}}\vec{\rho} \pm \lambda_{1,4,\vec{\tau}} z - \omega t)}, \tag{8}$$

где

$$\lambda_{1\vec{\tau}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - \varkappa^2_{\vec{\tau}}}, \quad \lambda_{4\vec{\tau}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - \varkappa^2_{\vec{\tau}}} \tag{9}$$

и

$$\vec{k}_{1,4,\vec{\tau}} \vec{E}_{1,4,\vec{\tau}} = 0, \quad \vec{k}_{1,4,\vec{\tau}} = \vec{\varkappa}_{\vec{\tau}} \pm \lambda_{1,4,\vec{\tau}} \vec{n}_z. \tag{10}$$

Граничные условия и условия поперечности полей (10) для нормальных компонент отраженных в область $z<0$ полей дают следующие выражения:

$$(E_{1\vec{\tau}})_z = \frac{2\varepsilon_0}{\Delta_{\vec{\tau}}}(C_{2\vec{\tau}} + C_{3\vec{\tau}}), \quad (H_{1\vec{\tau}})_z = \frac{2}{\bar{\Delta}_{\vec{\tau}}}(\bar{C}_{2\vec{\tau}} + \bar{C}_{3\vec{\tau}}). \tag{11}$$

В формулах (11)

$$\begin{aligned}\Delta_{\vec\tau} &= (\varepsilon_0\lambda_{1\vec\tau} \pm \varepsilon_1\lambda_{2\vec\tau})(\varepsilon_0\lambda_{4\vec\tau} + \varepsilon_2\lambda_{2\vec\tau})\, e^{-\lambda_{2\vec\tau}d} - \\ &- (\varepsilon_0\lambda_{1\vec\tau} - \varepsilon_1\lambda_{2\vec\tau})(\varepsilon_0\lambda_{4\vec\tau} - \varepsilon_2\lambda_{2\vec\tau})\, e^{i\lambda_{2\vec\tau}d},\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}C_{2\vec\tau} &= \left[\tilde q_{2\vec\tau}\left(\cos\lambda_{2\vec\tau}d - e^{i(\lambda_2+\tau_z)d}\right)\lambda_{2\vec\tau} + i\tilde\xi_{2\vec\tau}\sin\lambda_{2\vec\tau}d\right](D_{2\vec\tau})_z + \\ &+ a_{\vec\tau}(\vec\varkappa_{\vec\tau}\vec E)_{2z}\left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\lambda_{2\vec\tau}\left(e^{i(\lambda_2+\tau_z)d} - \cos\lambda_{2\vec\tau}d\right) - i\lambda_{4\vec\tau}\sin\lambda_{2\vec\tau}d\right],\end{aligned}$$

$$\tilde C_{2\vec\tau} = \left\{\lambda_{2\vec\tau}\tilde P_{2\vec\tau}\left[\cos\lambda_{2\vec\tau}d - e^{i(\lambda_2+\tau_z)d}\right] + i\tilde\eta_{2\vec\tau}\sin\lambda_{2\vec\tau}d\right\}(H_{2\vec\tau})_z,$$

$$\tilde q_{2\vec\tau} = \lambda_{4\vec\tau} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}(\lambda_2+\tau_z), \qquad \tilde\xi_{2\vec\tau} = \lambda_{4\vec\tau}(\lambda_2+\tau_z) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\lambda^2_{2\vec\tau}.$$

Величины $C_{3\vec\tau}$ и $\tilde C_{3\vec\tau}$ получаются соответственно из $C_{2\vec\tau}$ и $\tilde C_{2\vec\tau}$ заменой λ_2 на $-\lambda_2$, а $\tilde P_{2\vec\tau}$, $\tilde\eta_{2\vec\tau}$ и $\tilde\Delta_{\vec\tau}$ получаются соответственно из $\tilde q_{2\vec\tau}$, $\tilde\xi_{2\vec\tau}$ и $\Delta_{\vec\tau}$, если в последних положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0 = 1$.

Нормальная компонента индукции $(D_{2\vec\tau})_z$ определяется как

$$(D_{2\vec\tau})_z = \varepsilon_0 A_{2\vec\tau,z} + a_{\vec\tau}E_{2z}(\omega), \tag{13}$$

а $H_{2\vec\tau,z}(\omega)$ есть

$$H_{2\vec\tau,z}(\omega) = \frac{c}{\omega}[(\vec k_2+\vec\tau)\cdot\vec A_{\vec\tau}]_z. \tag{14}$$

Зная z-компоненты электрических и магнитных полей отраженных волн, из уравнений

$$\frac{\omega}{c}(H_{1\vec\tau})_z = [\vec\varkappa_{\vec\tau}\cdot\vec E_{1\vec\tau}]_z, \quad \lambda_{1\vec\tau}(E_{1\vec\tau})_z = \vec\varkappa_{\vec\tau}\vec E_{1\vec\tau} \tag{15}$$

легко получить остальные (x и y) компоненты.

Аналогично для амплитуд преломленных в область $z>d$ полей имеем

$$\begin{aligned}(E_{4\vec\tau})_z &= \frac{2\varepsilon_0}{\Delta_{\vec\tau}}(F_{2\vec\tau}+F_{3\vec\tau})\, e^{-i\lambda_{4\vec\tau}d}, \\ (H_{4\vec\tau})_z &= \frac{2}{\tilde\Delta_{\vec\tau}}(\tilde F_{2\vec\tau}+\tilde F_{3\vec\tau})\, e^{-i\lambda_{4\vec\tau}d},\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$F_{2\vec{\tau}} = \left\{\lambda_{2\vec{\tau}}\, q_{2\vec{\tau}}\left[\cos\lambda_{2\vec{\tau}} d e^{i(\lambda_2+\tau_z)d} - 1\right] - i\xi_{2\vec{\tau}}\, e^{i(\lambda_2+\tau_z)d}\sin\lambda_{2\vec{\tau}} d\right\}(D_{2\vec{\tau}})_z +$$

$$+ a_{\vec{\tau}}\left(\vec{\varkappa}_{\vec{\tau}}\vec{E}_{2\varkappa}\right)\left\{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\lambda_{2\vec{\tau}}\left[\cos\lambda_{2\vec{\tau}} d e^{i(\lambda_2+\tau_z)d} - 1\right] - i\lambda_{1\vec{\tau}}\sin(\lambda_{2\vec{\tau}} d)\, e^{i(\lambda_2+\tau_z)d}\right\}, \tag{17}$$

$$\tilde{F}_{2\vec{\tau}} = \left\{\lambda_{2\vec{\tau}} P_{2\vec{\tau}}\left[\cos\lambda_{2\vec{\tau}} d e^{i(\lambda_2+\tau_z)d} - 1\right] - i\eta_{2\vec{\tau}}\, e^{i(\lambda_2+\tau_z)d}\sin\lambda_{2\vec{\tau}} d\right\}(H_{2\vec{\tau}})_z,$$

$$q_{2\vec{\tau}} = \lambda_{1\vec{\tau}} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}(\lambda_2+\tau_z), \quad \xi_{2\vec{\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\lambda^2_{2\vec{\tau}} + \lambda_{1\vec{\tau}}(\lambda_2+\tau_z).$$

Величины $F_{3\vec{\tau}}$ и $\tilde{F}_{3\vec{\tau}}$ получаются из $F_{2\vec{\tau}}$ и $\tilde{F}_{2\vec{\tau}}$ соответственно заменами знака у λ_0 и индекса 2 на индекс 3 у $\vec{E}_2$ и $\vec{H}_2$. В формулах (16) и (17) $P_{2\vec{\tau}}$ и $\eta_{2\vec{\tau}}$ получаются из $q_{2\vec{\tau}}$ и $\xi_{2\vec{\tau}}$ соответственно заменой $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \to 1$.

Остальные компоненты полей являются решением системы, получающейся из (15) с помощью замен

$$\lambda_{1\vec{\tau}} \to -\lambda_{4\vec{\tau}}, \quad \vec{E}_{1\vec{\tau}} \to \vec{E}_{4\vec{\tau}}, \quad \vec{H}_{1\vec{\tau}} \to \vec{H}_{4\vec{\tau}}. \tag{18}$$

Формулы (11)—(18) полностью определяют амплитуды и поляризацию высших гармоник полей дифрагированных назад и вперед волн через амплитуду $\vec{E}_0$ невозмущенного решения внутри изотропной пластинки.

2. Перейдем к определению фазовых соотношений. Пусть углы падения начальной волны есть θ и φ, т. е.

$$k_x = k\sin\theta\cos\varphi, \quad k_y = k\sin\theta\sin\varphi, \quad k_z = k\cos\theta. \tag{19}$$

Тогда углы, под которыми идут дифрагированные назад и вперед волны, будут определяться выражениями

$$\theta_{1\vec{\tau}} = \arccos\left[\cos^2\theta - \frac{2\lambda}{l_1} n\cos\varphi - \frac{2\lambda}{l_2} m\sin\varphi - \lambda^2\left(\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}\right)\right]^{1/2}, \tag{20}$$

$$\theta_{4\vec{\tau}} = \arccos\left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta - 2\lambda\left(\frac{n\cos\varphi}{l_1} + \frac{m\sin\varphi}{l_2}\right) - \lambda^2\left(\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}\right)\right]^{1/2},$$

где $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}$ — длина волны падающего излучения.

В обеих средах $\varphi_{\vec{\tau}}$ определяется так

$$\varphi_{\vec{\tau}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{k_{y\tau}}{k_{x\tau}}. \tag{21}$$

Таким образом, мы получили формулы для амплитуд полей и углового распределения дифрагированного в области $z<0$ и $z>d$ излучения.

В заключение остановимся на смысле коэффициентов разложения $a_{\vec{\tau}}$ и пределах применимости теории возмущений. Если брать не пластину, а гофрированную по направлениям x и y поверхность диэлектрика с проницаемостью ε_2, задаваемую функцией $z=f(x,y)=f(x+l_1, y+l_2)$ и имеющую высоту d, то мы имеем аналогичную рассмотренной задачу, в которой в слое высоты d проницаемости ε_1 и ε_2 периодически меняются по закону, определяемому функцией $f(x,y)$. Разложение в ряд в этом случае производится по l_1, l_2 и d. Если же разложение производить по переменной электронной плотности в кристаллах, то результаты соответствуют задаче о дифракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке, причем значения коэффициентов $a_{\vec{\tau}}$ определяются параметрами решетки. Пределы применимости теории возмущений определены в [3, 4]; в частности, из рассмотрения выпадают частоты, определяемые из условия

$$\pi p = k_z l_3, \tag{22}$$

соответствующие полосе непрозрачности вдоль z.

Авторы благодарны Б. М. Болотовскому за обсуждение результатов.

Поступила 20.XI.1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *О. С. Мергелян*. Изв. вузов, Радиофизика, 13, 1412 (1970).
2. *О. С. Мергелян*. Оптика и спектроскопия, 30, 1123 (1971).
3. *Э. Маделунг*. Математический аппарат физики, ГИМФЛ, М., 1960.
4. *Л. Бриллюэн, М. Пароди*. Распространение электромагнитных волн в периодических структурах, ИЛ, М., 1959.

ՀԱՐԹ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔԻ ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՆ ԻԶՈՏՐՈՊ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԳՏՆՎՈՂ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԽՏՈՒԹՅԱՆ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿ ՇԵՐՏԻ ՎՐԱ

Յու. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ, Հ. Ս. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ, Մ. Պ. ՊՈՒԼԱՏՈՎ

Լուծված է երկու դիէլեկտրիկների միջև տեղավորված փոփոխական խտության դիէլեկտրիկ շերտի վրա էլեկտրամագնիսական ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը։ Շերտի դիէլեկտրիկական թափանցելիությունը երեք կոորդինատներից պարբերականորեն է կախված։ Ստացված լուծումից, որպես մասնավոր դեպքեր, կարելի է ստանալ դիֆրակցված ալիքների դաշտերի և անկյունային բաշխման արտահայտությունները բյուրեղային թիթեղի և բոլոր կոորդինատային առանցքների ուղղությամբ ծալքավորված դիէլեկտրիկական մակերևույթի համար։

DIFFRACTION OF PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE ON DIELECTRIC PLATE OF VARIBLE DENSITY

Yu. M. AJVAZYAN, O. S. MERGELYAN, M. P. POULATOV

The problem of the diffraction of plane electromagnetic wave on the dielectric plate of variable density is solved.