

ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

М. Р. МАГОМЕДОВ, С. С. ЭЛБАКЯН

В работе методом функции Грина получены решения уравнений Максвелла в диспергирующих слоистых средах для произвольного распределения внешних источников поля. Изложен простой и последовательный метод построения функций Грина в произвольных слоистых средах. Произведена наиболее удобная для приложений параметризация характеристической матрицы слоистой среды. Для слоисто-неоднородных сред с произвольным законом изменения $\varepsilon(\omega, z)$ приведено дифференциальное уравнение для коэффициента отражения.

Задача о построении решений уравнений Максвелла в диспергирующих слоистых средах для произвольного распределения источников поля была рассмотрена в работах [1—5]. В работе [6] методом функции Грина были получены точные решения уравнений Максвелла в слоистых средах. Авторы ограничились рассмотрением общих свойств слоистых сред. При этом было удобнее представлять решение в матричной форме. Для конкретных применений иногда бывает необходимо выражать решения через такие характеристики слоистой среды, как коэффициенты отражения и пропускания. Такой подход допускает также и простую физическую интерпретацию.

В настоящей работе излагается простой и последовательный метод построения функции Грина в слоистых средах и производится удобная для приложений параметризация характеристической матрицы слоистой среды.

1. Функция Грина уравнений Максвелла в слоистых средах

Как было показано в работе [6], для полного описания электромагнитных явлений в слоистых средах необходимо построить две скалярные функции $g_{\perp}(z, z')$ и $g_{\parallel}(z, z')$. Фурье-образ вектор-потенциала $\vec{A}(\vec{r}, \omega)$ выражается через эти скалярные функции по формулам

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) = \vec{A}_{\perp}(\vec{r}, \omega) + \vec{A}_{\parallel}(\vec{r}, \omega),$$

$$\vec{A}_{\perp}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2 c} \int d\vec{r}' \int d\vec{z} e^{i\vec{z} \cdot \vec{q}} \left[\vec{x} [j_{\perp}(\vec{r}', \omega) \vec{x}] \right] g_{\perp}(z, z'), \quad (1)$$

$$\vec{A}_{\parallel}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2 c} \int d\vec{r}' \int d\vec{z} e^{i\vec{z} \cdot \vec{q}} \left[j_{\parallel}(\vec{r}', \omega) - \frac{[\vec{x} [j_{\perp}(\vec{r}', \omega) \vec{x}]]}{x^2} \right] g_{\parallel}(z, z'),$$

где $\vec{x}$ и $\vec{q}$ — компоненты $\vec{k}$ и $\vec{r} - \vec{r}'$ в плоскости xy , а $j_{\parallel}(\vec{r}, \omega)$ означает тангенциальную составляющую Фурье-образа плотности тока

$$\vec{j}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{j}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt.$$

В работе [6] хотя и приведены правильные выражения для $g_{\perp}$ и $g_{\parallel}$, но там фактически отсутствует последовательный и четкий метод построения этих функций. Ниже мы изложим элементарный способ построения одномерной функции Грина $g_{\perp}(z, z')$ ($g_{\parallel}$ получается аналогичным образом).

Из уравнения для вектор-потенциала легко следует уравнение для определения $g_{\perp}(z, z')$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \lambda^2(z) \right) g_{\perp}(z, z') = -4\pi \delta(z - z'), \quad (2)$$

где

$$\lambda(z) = + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(z, \omega) - x^2 \right]^{-1/2}, \quad \text{Im } \lambda > 0$$

(прозрачные среды рассматриваются как предельный случай, когда $\text{Im } \lambda \rightarrow +0$).

Пусть имеется слоистая среда (многослойная система), состоящая из $N+2$ плоских слоев вещества с различными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_k(\omega)$ и толщинами a_k , где $k = 0, 1, \dots, N+1$, $a_0 = a_{N+1} = \infty$. Направим ось z по нормали к границам раздела сред в направлении возрастания нумерации и поместим начало координат на первой границе. Координаты границ обозначим через z_k , причем $a_k = z_k - z_{k-1}$, $z_{-1} = -\infty$, $z_0 = 0$, $z_{N+1} = +\infty$. Для аналитической записи функций, определенных в слоистых средах, введем функцию $f_k(z)$, равную единице в k -ом слое и нулю вне этого слоя. Тогда, если мы обозначим значение произвольной функции, скажем $y(z)$, в k -ом слое через $y_k(z)$, то во всем пространстве она может быть записана в виде

$$y(z) = \sum_{k=-1}^{N+1} f_k(z) y_k(z). \quad (3)$$

В частности, для многослойной системы

$$\lambda(z) = \sum_{k=0}^{N+1} f_k(z) \lambda_k, \quad \lambda_k = + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_k(\omega) - x^2 \right]^{-1/2}, \quad \text{Im } \lambda_k > 0.$$

Перечислим теперь условия, которым должна удовлетворять функция Грина $g_{\perp}$ в многослойной среде:

- функция $g_{\perp}(z, z')$ должна быть симметричной функцией переменных z и z' ;
- $g_{\perp}$ должна быть запаздывающей функцией Грина;
- сама функция $g_{\perp}$ является непрерывной функцией z и z' , но ее производная разрывна в точке $z=z'$ и испытывает там скачок

$$\left. \frac{dg_{\perp}(z, z')}{dz} \right|_{z'=z+\delta} - \left. \frac{dg_{\perp}(z, z')}{dz} \right|_{z'=z-\delta} = -4\pi, \quad \delta \rightarrow +0;$$

2) $g_{\perp}$ и $\frac{dg_{\perp}}{dz}$ должны быть непрерывны на границах раздела сред.

Условия а, б и в являются обычными требованиями к функции Грина уравнения (2). Что касается условий 2, то они следуют из требования непрерывности $\tilde{A}_{\perp}$ и $\frac{d}{dz} A_{\perp}$ на границах раздела сред и из формулы (1).

Теперь у нас имеется все необходимое для построения $g_{\perp}$. Решение уравнения (2) при $z \neq z'$ в k -ом слое есть

$$u_k e^{i\lambda_k(z-z_k)} + v_k e^{-i\lambda_k(z-z_k)},$$

где u_k и v_k — неизвестные постоянные.

Поэтому два линейно независимых решения однородного уравнения запишем в виде

$$y_1(z) = \sum_{k=0}^{N+1} f_k(z) [u_k e^{i\lambda_k(z-z_k)} + v_k e^{-i\lambda_k(z-z_k)}],$$

$$y_2(z) = \sum_{k=0}^{N+1} f_k(z) [u_k^+ e^{-i\lambda_k(z-z_k)} + v_k^+ e^{i\lambda_k(z-z_k)}].$$

Для того, чтобы y_1 и y_2 были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = y_1(z) y_2'(z) - y_1'(z) y_2(z)$$

был отличен от нуля (см., напр., [7]). Вронскиан W для уравнения (2) является постоянной величиной. Вычисляя его в k -ом слое, получим $W = 2i\lambda_k (v_k v_k^+ - u_k u_k^+)$. Выберем $y_1(z)$ так, чтобы при $z \rightarrow +\infty$ она оставалась конечной (напомним, что $\text{Im } \lambda_k > 0$). Для этого необходимо положить $v_{N+1} = 0$. Для конечности $y_2(z)$ при $z \rightarrow -\infty$ положим $v_0^+ = 0$. Для нормировки $y_1(z)$ и $y_2(z)$ мы можем также положить $u_0 = 1$, $u_{N+1}^+ = 1$. Поэтому для вронскиана имеем $W = -2i\lambda_0 u_0^+ = -2i\lambda_{N+1} u_{N+1}^+$. Для определения постоянных u_k , v_k , u_k^+ , v_k^+ применим условия 2 к y_1 и y_2 . Запишем полученные таким образом равенства в виде одного матричного уравнения

$$P_{k, k+1}(1) A_{k+1} = S^{k+1}(1) A_k, \quad (4)$$

$$A_k = \begin{pmatrix} v_k & u_k^+ \\ u_k & v_k^+ \end{pmatrix}, \quad S^k(1) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_k} & r_{k, k-1}(1) e^{-i\varphi_k} \\ r_{k, k-1}(1) e^{i\varphi_k} & e^{i\varphi_k} \end{pmatrix},$$

$$p_{k, k+1}(1) = \frac{2\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} + \lambda_k}, \quad r_{k, k-1}(1) = \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k + \lambda_{k-1}},$$

$$\varphi_k = a_k \lambda_k.$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$\prod_{j=0}^{k-1} p_{j, j+1}(1) A_k = S^{k, 1}(1) A_0, \quad (5)$$

где $S^{k,1} = S^* S^{k-1} \dots S^2 S^1$. Матрица $S^{k,1}$ определяет все характерные свойства слоистой среды и в литературе принято называть ее *характеристической матрицей* слоистой среды (см., напр., [8]). Полагая в (5) $k=0$, можно получить очень удобное в дальнейшем доопределение матрицы $S^{k,m}$, а именно: $S^{k,m} = I$ при $m > k$, где I — единичная матрица. Что касается произведения, то $\prod_{j=1}^m x_j = 1$ при $m < l$.

Вычисляя детерминант обеих сторон равенства (5), получим соотношение

$$W(y_1, y_2) = 2i\lambda_k \det A_k = 2i\lambda_0 \det A_0, \quad (6)$$

указывающее на постоянство вронскиана и необходимость специального выбора линейно независимых решений в слоистых средах [9]. При $k=N+1$ из равенства (5) получаем четыре уравнения для определения четырех величин v_0 , u_0^+ , u_{N+1}^+ и v_{N+1}^+ . После элементарных преобразований решение (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{S_{-1,-1}^{N+1,k+1}(1)}{S_{-1,-1}^{N+1,1}(1)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{j+1,j}(1), \\ v_k &= - \frac{S_{-1,+1}^{N+1,k+1}(1)}{S_{-1,-1}^{N+1,1}(1)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{j+1,j}(1), \\ u_k^+ &= \frac{S_{-1,-1}^{k,1}(1)}{S_{-1,-1}^{N+1,1}(1)} \prod_{j=k}^N p_{j,j+1}(1), \\ v_k^+ &= \frac{S_{+1,-1}^{k,1}(1)}{S_{-1,-1}^{N+1,1}(1)} \prod_{j=k}^N p_{j,j+1}(1), \\ S &= \begin{pmatrix} S_{-1,-1} & S_{-1,+1} \\ S_{+1,-1} & S_{+1,+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Эти равенства определяют неизвестные постоянные при всех k (включая и их граничные значения, например, $u_0 = 1$, $v_0^+ = 0$), поскольку по определению

$$S^{k,m} = I \quad \text{при} \quad m > k.$$

Несколько странная нумерация элементов S -матрицы связана с тем, что при такой нумерации можно получить очень полезную для вычисления элементов характеристической матрицы формулу. Действительно, из определения матрицы S^k легко видеть, что ее элементы могут быть представлены в виде

$$S_{l_k, l_{k-1}}^k = e^{i l_k \bar{r}_k} [(1 - r_{k, k-1}) \delta_{l_k, l_{k-1}} + r_{k, k-1}],$$

где l_k, l_{k-1} принимают значения ± 1 , $\delta_{l_k, l_{k-1}}$ — символ Кронекера. Поэтому для элементов характеристической матрицы

$$S_{l_k, l_m}^{k, m+1} = S_{l_k, l_{k-1}}^k S_{l_{k-1}, l_{k-2}}^{k-1} \cdots S_{l_{m+2}, l_{m+1}}^{m+2} S_{l_{m+1}, l_m}^{m+1}$$

получим следующий результат:

$$S_{l_k, l_m}^{k, m+1} = \sum_{(l)=-1}^{+1} \prod_{j=m+1}^k |1| e^{i l_j \varphi} [(1 - r_{j, j-1}) \delta_{l_j, l_{j-1}} + r_{j, j-1}], \quad (8)$$

где (l) означает совокупность всех повторяющихся индексов $l_{m+1}, l_{m+2}, \dots, l_{k-1}$.

Равенства (7) полностью определяют два линейно независимых решения $y_1(z)$ и $y_2(z)$ в слоистых средах. Физический смысл этих решений очевиден: $y_1(z)$, например, соответствует физической ситуации, когда плоская волна единичной амплитуды падает на границу раздела с номером $k=0$, частично отражается от слоистой среды (от границ с $k=0, 1, \dots, N$) с амплитудой u_0 , проникает во все слои, претерпевает там многократные отражения и проходит в слой с номером $k=N+1$, имея амплитуду u_{N+1} . Условие $u_{N+1}=0$ означает, что в $(N+1)$ -слое существует только волна, движущаяся к бесконечности (принцип излучения). Функция Грина $g_{\perp}(z, z')$ теперь легко может быть написана. Согласно условию б, большую из величин z и z' мы должны приписать функции $y_1(z)$, а меньшую — функции $y_2(z)$. Это следует из конечности этих функций соответственно при $z \rightarrow +\infty$ и $z \rightarrow -\infty$ (а также из их физического смысла). Использование условия а определяет при этом функцию $g_{\perp}$ с точностью до постоянного фактора, который можно найти из условия в и он равен $4\pi/W$. Поэтому для $g_{\perp}$ имеем

$$g_{\perp}(z, z') = \frac{4\pi}{W} [y_1(z)y_2(z') \vartheta(z-z') + y_1(z')y_2(z) \vartheta(z'-z)], \quad (9)$$

где $\vartheta(x)$ равна единице при $x>0$ и нулю при $x<0$.

Подставляя в эту формулу выражения для $y_1(z)$ и $y_2(z)$, получим

$$g_{\perp}(z, z') = 2\pi i \sum_{m=0}^{N+1} \sum_{k=0}^{N+1} f_k(z) f_m(z') \left\{ \frac{e^{i\lambda_k |z-z'|}}{\lambda_k} \delta_{mk} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-i\lambda_k (z-z_k) - i\lambda_m (z'-z_m)}}{\lambda_k} R_{mk}(1) + \frac{e^{i\lambda_k (z-z_k) - i\lambda_m (z'-z_m)}}{\lambda_k} B_{mk}(1) + \right. \\ \left. + \frac{e^{i\lambda_k (z-z_k) + i\lambda_m (z'-z_m)}}{\lambda_k} R_{mk}^+(1) + \frac{e^{-i\lambda_k (z-z_k) + i\lambda_m (z'-z_m)}}{\lambda_k} B_{mk}^+(1) \right\},$$

где коэффициенты $R(1)$ и $B(1)$ даются формулами

$$R_{mk}(1) = \begin{cases} -\frac{v_k u_m^+}{\det A_k}, & k \geq m \\ -\frac{v_m u_k^+}{\det A_k}, & k \leq m, \end{cases} \quad B_{mk}(1) = \begin{cases} -\frac{u_k u_m^+}{\det A_k} - \delta_{mk}, & k \geq m \\ -\frac{v_m v_k^+}{\det A_k}, & k \leq m, \end{cases} \quad (11)$$

$$R_{mk}^+(1) = \begin{cases} -\frac{u_k v_m^+}{\det A_k}, & k \geq m \\ -\frac{u_m v_k^+}{\det A_k}, & k \leq m \end{cases}, \quad B_{mk}^+(1) = \begin{cases} -\frac{v_k v_m^+}{\det A_k}, & k \geq m \\ -\frac{u_m v_k^+}{\det A_k} - \delta_{mk}, & k \leq m. \end{cases}$$

При переходе от (9) к (10) мы воспользовались соотношением (6) и ввели вронскиан под знак суммирования из соображений удобства. Как следствие симметрии функции Грина из формул (11) вытекают следующие соотношения:

$$\frac{R_{mk}(1)}{\lambda_k} = \frac{R_{km}(1)}{\lambda_m}, \quad \frac{R_{mk}^+(1)}{\lambda_k} = \frac{R_{mk}^+(1)}{\lambda_m},$$

$$\frac{B_{mk}(1)}{\lambda_k} = \frac{B_{km}^+(1)}{\lambda_m} \quad (12)$$

и тождество

$$R_{mk} R_{mk}^+ - B_{mk} B_{mk}^+ = B_{mm} \delta_{mk}.$$

Выше мы подробно изложили процедуру построения функции $g_{\perp}(z, z')$. Нам необходимо еще выражение для $g_{\parallel}(z, z')$. В отличие от $g_{\perp}(z, z')$ функция $g_{\parallel}(z, z')$ не является симметричной относительно переменных z и z' , так как уравнение для определения $g_{\parallel}(z, z')$ не является самосопряженным, т. е. уравнением типа Штурма-Лиувилля. Однако простым преобразованием это уравнение можно привести к самосопряженному виду и с помощью не более сложных рассуждений, чем приведенные выше, показать, что функция $g_{\parallel}(z, z')$ представима в виде

$$g_{\parallel}(z, z') = 2\pi i \sum_{m=0}^{N+1} \sum_{k=0}^{N+1} f_k(z) f_m(z') \left\{ \frac{e^{i\lambda_k |z-z'|}}{\lambda_k} \delta_{mk} + \right.$$

$$+ \frac{e^{-i\lambda_k(z-z_k) - i\lambda_m(z'-z_m)}}{i\lambda_k} \frac{x^2 J_z(-\lambda_m) - \lambda_m \overleftrightarrow{J}(-\lambda_m)}{x^2 J_z(-\lambda_m) + \lambda_k \overleftrightarrow{J}(-\lambda_m)} R_{mk}(2) +$$

$$+ \frac{e^{i\lambda_k(z-z_k) - i\lambda_m(z'-z_m)}}{\lambda_k} \frac{x^2 J_z(-\lambda_m) - \lambda_m \overleftrightarrow{J}(-\lambda_m)}{x^2 J_z(-\lambda_m) - \lambda_k \overleftrightarrow{J}(-\lambda_m)} B_{mk}(2) +$$

$$+ \frac{e^{i\lambda_k(z-z_k) + i\lambda_m(z'-z_m)}}{\lambda_k} \frac{x^2 J_z(\lambda_m) + \lambda_m \overleftrightarrow{J}(\lambda_m)}{x^2 J_z(\lambda_m) - \lambda_k \overleftrightarrow{J}(\lambda_m)} R_{mk}^+(2) +$$

$$\left. + \frac{e^{-i\lambda_k(z-z_k) + i\lambda_m(z'-z_m)}}{\lambda_k} \frac{x^2 J_z(\lambda_m) + \lambda_m \overleftrightarrow{J}(\lambda_m)}{x^2 J_z(\lambda_m) + \lambda_k \overleftrightarrow{J}(\lambda_m)} B_{mk}^+(2) \right\}, \quad (13)$$

где

$$\overleftrightarrow{J}(\pm \lambda_m) = \int f_m(z') \overleftrightarrow{J}(r', \omega) e^{-i\lambda_m z' \pm i\lambda_m z'} dr'. \quad (14)$$

Используя формулы (7), (11) (и аналогичные формулы для определения $R(2)$ и $B(2)$), выразим теперь все коэффициенты $R(\tau)$ и $B(\tau)$, где $\tau=1,2$, через элементы характеристической матрицы $S(\tau)$. После элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} R_{mk}(\tau) &= -\frac{S_{-1,+1}^{N+1,m+1}(\tau) S_{-1,-1}^{k,1}(\tau)}{S_{-1,-1}^{N+1,1}(\tau)} \prod_{j=k}^{m-1} p_{j+1,j}(\tau), \quad k \leq m, \\ R_{mk}^+(\tau) &= \frac{S_{-1,-1}^{N+1,k+1}(\tau) S_{+1,-1}^{m,1}(\tau)}{S_{-1,-1}^{N+1,1}(\tau)} \prod_{j=m}^{k-1} p_{j,j+1}(\tau), \quad k \geq m, \\ B_{mk}(\tau) &= -\frac{S_{-1,+1}^{N+1,m+1}(\tau) S_{+1,-1}^{k,1}(\tau)}{S_{-1,-1}^{N+1,1}(\tau)} \prod_{j=k}^{m-1} p_{j+1,j}(\tau), \quad k \leq m, \\ B_{mk}(\tau) &= \frac{S_{-1,-1}^{N+1,k+1}(\tau) S_{-1,-1}^{m,1}(\tau)}{S_{-1,-1}^{N+1,1}(\tau)} \prod_{j=m}^{k-1} p_{j,j+1}(\tau), \quad k \geq m+1. \end{aligned} \quad (15)$$

При других соотношениях между индексами k и m коэффициенты определяются из соотношений симметрии

$$\begin{aligned} R_{mk}(1) &= \frac{\lambda_k}{\lambda_m} R_{km}(1), \quad R_{mk}^+(1) = \frac{\lambda_k}{\lambda_m} R_{km}^+(1), \\ R_{mk}(2) &= \frac{\varepsilon_k \lambda_k}{\varepsilon_m \lambda_m} R_{km}(2), \quad R_{mk}^+(2) = \frac{\varepsilon_k \lambda_k}{\varepsilon_m \lambda_m} R_{km}^+(2). \end{aligned} \quad (16)$$

Что касается величин $B^+(\tau)$, то они полностью определяются из равенств

$$B_{mk}^+(1) = \frac{\lambda_k}{\lambda_m} B_{km}(1), \quad B_{mk}^+(2) = \frac{\varepsilon_k \lambda_k}{\varepsilon_m \lambda_m} B_{km}(2). \quad (17)$$

Характеристическая матрица $S^{k,m}(\tau)$ дается выражением

$$S^{k,m}(\tau) = S^k(\tau) \dots S^m(\tau),$$

где

$$\begin{aligned} S^k(\tau) &= \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_k} & r_{k,k-1}(\tau) e^{-i\varphi_k} \\ r_{k,k-1}(\tau) e^{i\varphi_k} & e^{i\varphi_k} \end{pmatrix}, \\ r_{k+1,k}(1) &= \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1} + \lambda_k}, \quad p_{k+1,k}(1) = \frac{2\lambda_k}{\lambda_{k+1} + \lambda_k}, \\ r_{k+1,k}(2) &= \frac{\varepsilon_k \lambda_{k+1} - \varepsilon_{k+1} \lambda_k}{\varepsilon_k \lambda_{k+1} + \varepsilon_{k+1} \lambda_k}, \quad p_{k+1,k}(2) = \frac{2\varepsilon_k \lambda_k}{\varepsilon_k \lambda_{k+1} + \varepsilon_{k+1} \lambda_k}, \end{aligned} \quad (19)$$

Легко проверить, что выражения (15) с точностью до обозначений совпадают с приведенными в работе [6].

2. Параметризация характеристической матрицы

Формулы (15)–(17) определяют коэффициенты $R(\tau)$ и $B(\tau)$ через элементы характеристической матрицы. Выразим теперь эти коэффициен-

ты через такие физические характеристики слоистой среды, как коэффициенты отражения и прохождения. Для этого введем в рассмотрение величины $r_{k,0}(\tau)$ и $r_{k,N+1}(\tau)$, определяемые равенствами

$$r_{k,0}(\tau) = e^{-2l\tau_k} \frac{S_{+1,-1}^{k,1}(\tau)}{S_{-1,-1}^{k,1}(\tau)}, \quad (20)$$

$$r_{k,N+1}(\tau) = -\frac{S_{-1,+1}^{N+1,k+1}(\tau)}{S_{-1,-1}^{N+1,k+1}(\tau)}. \quad (21)$$

Пользуясь соотношениями $S_{+1,-1}^{k+1,1} = S_{+1,-1}^{k+1} S_{-1,-1}^{k+1}$ и $S_{-1,+1}^{N+1,k+1} = S_{-1,+1}^{N+1,k+2} S_{+1,-1}^{k+1}$, легко получить для этих величин рекуррентные формулы

$$r_{k+1,0}(\tau) = \frac{r_{k+1,k}(\tau) + r_{k,0}(\tau) e^{2l\tau_k}}{1 + r_{k+1,k}(\tau) r_{k,0}(\tau) e^{2l\tau_k}}, \quad (22)$$

$$r_{0,0}(\tau) = 0,$$

$$r_{k,N+1}(\tau) = \frac{r_{k,k+1}(\tau) + r_{k+1,N+1}(\tau) e^{2l\tau_{k+1}}}{1 + r_{k,k+1}(\tau) r_{k+1,N+1}(\tau) e^{2l\tau_{k+1}}}, \quad (23)$$

$$r_{N+1,N+1}(\tau) = 0,$$

из которых они полностью определяются.

Учитывая связь $1 - r_{k+1,k}^2(\tau) = p_{k,k+1}(\tau) p_{k+1,k}(\tau)$ между коэффициентами отражения и прохождения, перепишем равенства (22) и (23) в следующем виде:

$$r_{k+1,0}(\tau) = r_{k+1,k}(\tau) + p_{k+1,k}(\tau) r_{k,0}(\tau) \alpha_{0,k,k+1}(\tau) p_{k,k+1}(\tau) e^{2l\tau_k}, \quad (24)$$

$$r_{k,N+1}(\tau) = r_{k,k+1}(\tau) + p_{k,k+1}(\tau) r_{k+1,N+1}(\tau) \alpha_{N+1,k+1,k}(\tau) p_{k+1,k}(\tau) e^{2l\tau_{k+1}}, \quad (25)$$

где

$$\alpha_{0,k,k+1}(\tau) = [1 + r_{k+1,k}(\tau) r_{k,0}(\tau) e^{2l\tau_k}]^{-1}, \quad (26)$$

$$\alpha_{N+1,k+1,k}(\tau) = [1 + r_{k,k+1}(\tau) r_{k+1,N+1}(\tau) e^{2l\tau_{k+1}}]^{-1}.$$

В таком виде рекуррентные соотношения для $r_{k,0}$ и $r_{k,N+1}$ допускают простую физическую интерпретацию, а именно: $r_{k,0}$ является коэффициентом отражения от части слоистой среды, расположенной слева от k -го слоя (т. е. от границ раздела $0, 1, 2, \dots, k-1$), и формула (24) показывает, что волна, падающая из $(k+1)$ -го слоя на границу с номером k , частично отражается от этой границы ($r_{k+1,k}$), частично проходит в k -ую среду ($p_{k+1,k}$), отражается от части слоистой среды ($r_{k,0}$), претерпевает в k -ом слое многократные отражения ($\alpha_{0,k,k+1}$) и выходит обратно в $(k+1)$ -ый слой ($p_{k,k+1}$). Фактор $\exp[2l\tau_k]$ учитывает запаздывание волны относительно отраженной от k -ой границы. Аналогичным образом, $r_{k,N+1}$ является коэффициентом отражения от части слоистой среды, расположенной справа от k -го слоя (от границ раздела $k, k+1, \dots, N+1$).

Соотношения (24) и (25) совпадают с формулами, полученными в работе [5], где они были выведены из физических соображений, пользуясь методом изображений. В случае периодической среды из формул (22) и

(23) можно получить выражения, соответствующие результатам работы [10].

Покажем теперь, что из двух величин $r_{k,0}$ и $r_{k,N+1}$ необходимо на самом деле вычислить только одну, например, $r'_{k,0}$. В формуле (22) индекс k принимает значения $0, 1, 2, \dots, N+1$, а в (23) процесс вычисления $r_{k,N+1}$ необходимо начать с $k=N+1$, так как $r_{N+1,N+1} = 0$. Это означает, что k последовательно принимает значения $N+1, N, \dots, 0$. Поэтому изменяя в (22) нумерацию сред, т. е. произведя замену всех индексов $j \rightarrow N+1-j$, получим выражение

$$r_{N-k,N+1}(\tau) = \frac{r_{N-k,N+1-k}(\tau) + r_{N+1-k,N+1}(\tau) e^{2i\varphi_{N-k}}}{1 + r_{N-k,N+1-k}(\tau) r_{N+1-k,N+1}(\tau) e^{2i\varphi_{N-k}}},$$

ничем не отличающееся от соотношения (23). Отсюда следует, что $r_{k,N+1}$ можно получить из $r_{k,0}$ изменением нумерации слоев.

Для иллюстрации приведенных выше соотношений рассмотрим, например, трехслойную среду, т. е. $N=1$. Полагая в (22) $k=0, 1$, получим

$$r_{0,0} = 0, \quad r_{10} = r_{10}, \quad r_{20} = \frac{r_{21} + r_{10} e^{2i\varphi_1}}{1 + r_{21} r_{10} e^{2i\varphi_1}}.$$

Заменяя в этих равенствах все индексы $j \rightarrow 2-j$, имеем

$$r_{2,2} = 0, \quad r_{12} = r_{12}, \quad r_{02} = \frac{r_{01} + r_{12} e^{2i\varphi_1}}{1 + r_{01} r_{12} e^{2i\varphi_1}}.$$

Эти же равенства, очевидно, следуют из (23) при $k=2, 1, 0$.

Используя (20) и (21), легко можно показать, что диагональные элементы характеристической матрицы факторизуются

$$S_{-1,-1}^{k,1}(\tau) = e^{-i \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_{j+1}} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{0,j,j+1}(\tau)}, \quad (27)$$

$$S_{-1,-1}^{N+1,k+1}(\tau) = e^{-i \sum_{j=k}^N \varphi_{j+1}} \frac{1}{\prod_{j=k}^N \alpha_{N+1,j+1,j}(\tau)}. \quad (28)$$

Этим заканчивается параметризация характеристической матрицы. Подставляя выражения (27) и (28) в формулы (15) и используя (20) и (21), перепишем выражения для коэффициентов R и B в виде

$$R_{mk}(\tau) = e^{i \sum_{j=k}^{m-1} \varphi_{j+1}} \frac{r_{m,N+1}(\tau)}{1 - r_{m,N+1}(\tau) r_{m,0}(\tau) e^{2i\varphi_m}} \prod_{j=k}^{m-1} p_{j-1,j}(\tau) z_{0,j,j+1}(\tau),$$

$k \leq m,$

$$R_{mk}^+(\tau) = e^{i \sum_{j=m}^{k-1} \varphi_{j+1}} \frac{r_{m,0}(\tau) e^{2i\varphi_m}}{1 - r_{m,N+1}(\tau) r_{m,0}(\tau) e^{2i\varphi_m}} \prod_{j=m}^{k-1} p_{j,j+1}(\tau) a_{N+1,j+1,j}(\tau),$$

$$k \geq m, \quad (29)$$

$$B_{mk}(\tau) = r_{k,0}(\tau) e^{2i\varphi_k} R_{mk}(\tau), \quad k \leq m,$$

$$R_{mk}^+(\tau) = r_{m,0}(\tau) e^{2i\varphi_m} B_{mk}(\tau), \quad k \geq m+1.$$

Как уже было сказано выше, при других соотношениях между индексами удобно пользоваться равенствами (16).

Таким образом, все коэффициенты выражаются фактически через одну единственную величину $r_{k,0}$. Это и не удивительно, поскольку проведенная выше параметризация характеристической матрицы соответствует переходу от линейного уравнения второго порядка к уравнению типа Риккати, решение которого дает нам всю информацию. Легко показать, что соотношения (22) и (23) эквивалентны уравнению типа Риккати для многослойной среды. Чтобы показать это, перейдем, например, в формуле (23) при $\tau=1$ к непрерывному изменению $\varepsilon(z)$. Будем считать, что оптическая толщина $(k+1)$ -го слоя бесконечно мала. Разлагая соответствующие величины в (23) по степеням оптической толщины $(k+1)$ -го слоя и удерживая члены первого порядка малости, получим уравнение Риккати для коэффициента отражения [11]

$$r'(z) + 2i\lambda(z)r(z) = \frac{1}{2} \frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)} [1 - r^2(z)],$$

$$r(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow +\infty.$$

Такой метод перехода к непрерывному распределению впервые был применен в работе [12] и известен как «принцип инвариантности Амбарцумяна» и широко используется в настоящее время (см., напр., [13]).

В заключение выражаем благодарность Г. М. Гарибяну за ценные замечания и полезные советы.

Ереванский физический институт

Поступила 18.IV.1974

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. М. Гарибян, М. Р. Магомедов. ДАН АрмССР, 36, 77 (1963).
2. М. Р. Магомедов. ДАН АрмССР, 36, 157 (1963).
3. М. Р. Магомедов. Изв. АН АрмССР, Физика, 2, 170 (1967).
4. В. Е. Пафомов. Препринт ФИАН, № 31, 1966.
5. В. Е. Пафомов. Изв. вузов, Радиофизика, 10, 240 (1967).
6. М. Р. Магомедов, М. М. Мурадян. Изв. АН АрмССР, Физика, 7, 3 (1972).
7. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1958, т. I.
8. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики, Изд. Наука, 1970.
9. Г. М. Гарибян. ЖЭТФ, 39, 1630 (1960).
10. В. А. Аракелян, Г. М. Гарибян. Изв. АН АрмССР, Физика, 4, 339 (1969).
11. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах, Изд. Наука, М., 1973.

12. В. А. Амбарцумян. ДАН СССР, 43, № 3, 106 (1944).

13. Ч. Г. Папаян. Теория распространения электромагнитных волн, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1974.

ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱՄ ՄԱՍՆԻԿԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Ռ. ՄԱԳՈՄԵԴՈՎ, Ս. Ս. ԷԼԲԱԿՅԱՆ

Աշխատանքում Գրինի ֆունկցիաների մեթոդով ստացված են Մաքսվելի հավասարումների լուծումները դիսպերսիոն շերտավոր միջավայրերում դաշտի արտաքին աղբյուրների կամայական բաշխման դեպքում: Շարադրված է կամայական շերտավոր միջավայրերում Գրինի ֆունկցիայի կառուցման պարզ և հետևողական մեթոդ: Շերտավոր միջավայրի խարակտերիստիկ մատրիցան ենթարկված է կիրառումների համար հարմար պարամետրիզացիայի: Կամայական օրենքով փոփոխվող $\varepsilon(Z, \omega)$ -ով օժտված շերտավոր-անհամասեռ միջավայրերի անդրադարձման ցուցիչի համար բերված է դիֆերենցիալ հավասարում:

THE THEORY OF RADIATION OF CHARGED PARTICLES IN ARBITRARY LAMINATED MEDIA

M. R. MAGOMEDOV, S. S. ELBAKYAN

The solution of Maxwell equations in laminated media for arbitrary distributed external sources is obtained by Green function method. A simple and consistent method for the construction of Green functions in arbitrary laminated media is given. The parametrization of the characteristic matrix for laminated media in the form most convenient for applications is made.