Изв. АН Армянской ССР, Физика, 9, 240—247 (1974)

К МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКИХ СФЕРОИДОВ МАКЛОРЕНА

Р. С. ОГАНЕСЯН, М. Г. АБРАМЯН, В. Л. ЭКЕЛЕКЯН

Рассмотрен вопрос устойчивости сфероидов Маклорена при наличии тороидального магнитного поля с учетом малой вязкости по отношению к возмущениям типа $n=m=2$, являющимся определяющими в теории устойчивости сфероидальных фигур. В рамках линейной теории установлено, что малая кинематическая вязкость (ν) при наличии малого ($\nu^{1/4}$) тороидального магнитного поля отклоняет предельную точку устойчивости влево от точки бифуркации и изменяет частоту колебаний. Установлено также, что магнитные поля порядка ν^r при $r > 0{,}25$ не влияют на устойчивость рассматриваемых сфероидов.

В работе [1] была рассмотрена устойчивость сфероидов Маклорена по отношению к малым возмущениям типа $n=m=2$ при наличии тороидального магнитного поля. В настоящей работе решается та же задача с учетом малой вязкости.

Предположим, что равновесный сфероид подвергается малым возмущениям. В этом случае скорость возмущения будет удовлетворять условию несжимаемости

$$\operatorname{div}\vec{u}=0 \tag{1}$$

и линеаризованному уравнению Навье-Стокса

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+2\,\vec{\omega}\times\vec{u}=-\operatorname{grad}\Pi-\frac{1}{4\pi\rho}\,[\vec{B}\operatorname{rot}\vec{B}]+\nu\Delta\vec{u}, \tag{2}$$

где ν — кинематическая вязкость, ω — угловая скорость сфероида, $\vec{B}$ — индукция магнитного поля,

$$\Pi=\frac{p}{\rho}-V-\frac{1}{2}\,\omega^2(x^2+y^2) \tag{3}$$

(p — давление, V — гравитационный потенциал, ρ — плотность).

Условие равенства нулю нормального компонента тензора натяжений на свободной возмущенной S-поверхности конфигурации [2, 3]

$$(p\delta_{ij}-2\nu\rho R_{ij})\,n_k=0 \tag{4}$$

является граничным для настоящей задачи, где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности сфероида, а

$$R_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{5}$$

есть тензор вязких натяжений.

Решения системы уравнений (1) и (2) представим в виде

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1, \qquad p = p_e + p_0 + p_1,$$
$$V = V_e + V_0 + V_1, \quad \vec{B} = \vec{B}_e + \vec{B}_0 + \vec{B}_1, \tag{6}$$

где индекс „e“ указывает на равновесные параметры конфигурации, индекс „0“ — на параметры невязкой задачи и, наконец, индекс „1“ — вязкой задачи. Предполагается, что

$$|f_e| \gg |f_0|, \qquad |f_e| \gg |f_1|, \tag{7}$$

где f — произвольный параметр задачи.

Решение задачи сильно упрощается в системе сплющенных сфероидальных координат. Дальнейшие обозначения, связанные с этой системой, можно найти в статьях [1, 2].

С учетом (6) исходные уравнения в силу их линейности можно разбить следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}_0 = -\nabla \Pi_0', \qquad \operatorname{div} \vec{u}_0 = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}_1 = -\nabla \Pi_1 - \frac{1}{4\pi\rho}\left\{\left[\vec{B}_e \operatorname{rot} \vec{B}_1\right] + \left[\vec{B}_1 \operatorname{rot} \vec{B}_e\right]\right\} + \nu \Delta \vec{u}_1, \qquad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0, \tag{9}$$

а граничное условие (4) $\left(\text{с учетом того, что } \vec{B}_e = \hat{e}_\varphi B_S \left(\frac{r}{a}\right) \sin\vartheta \right)$ —

$$[\Phi_0' + \rho\Pi_0']_{S_e} + [\Phi_1 + \rho\,\Pi_1 - \nu\rho\, R_{0\zeta\zeta}]_{S_e} = 0, \tag{10}$$

$$[R_{\zeta\vartheta}]_{S_e} = [R_{\zeta\varphi}]_{S_e} = 0. \tag{11}$$

В уравнениях (8) и (10) введены следующие обозначения [1]:

$$\Pi_0' = \frac{p_0}{\rho} - V_0 + \frac{1}{4\pi\rho}\vec{\xi}_0 \operatorname{grad} \frac{B_e^2}{2},$$
$$\Pi_1 = \frac{p_1}{\rho} - V_1,$$
$$\Phi_0' = \rho V_0 + \vec{\xi}_0 \operatorname{grad}\left(p_e + \frac{B_e^2}{8\pi}\right),$$
$$\Phi_1 = \rho V_1 + \vec{\xi}_1 \operatorname{grad} p_e. \tag{12}$$

Здесь S_e — невозмущенная поверхность сфероида, которая в сплющенной сфероидальной системе координат имеет вид [2]

$$\zeta = E, \tag{13}$$

а $\vec{\xi}_0$ ($\vec{\xi}_1$) — вектор отклонения частиц невязкой (вязкой) жидкости от равновесного положения, который в линейном приближении есть

$$\vec{u}_0 = \frac{\partial \vec{\xi}_0}{\partial t} \qquad \left(\vec{u}_1 = \frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial t}\right). \tag{14}$$

Для невязкой задачи, следуя Картану, можно получить следующие решения [2]:

$$\Pi_0' = h(x+iy)^2 \qquad (h = \text{const}),$$
$$u_{0x} = -\frac{2h(x+iy)}{s-2i\omega}, \quad u_{0y} = -\frac{2hi(x+iy)}{s-2i\omega}, \quad u_{0z} = 0, \tag{15}$$

а также следующее дисперсионное соотношение [1]

$$s_0(s_0 - 2i\omega) + Q(e) - \frac{B_s^2}{2\pi\rho a^2} = 0, \tag{16}$$

где s_0 — частота колебаний сфероида ($u_0 \sim \exp\{s_0 t\}$), e — эксцентриситет,

$$Q(e) = \frac{\pi G\rho}{e^5}\sqrt{1-e^2}\,[e(1-e^2)(3+10e^2) - (3+8e^2-8e^4)\arcsin e]. \tag{17}$$

Прежде, чем перейти к исследованию вязкой задачи, приведем необходимые компоненты тензора натяжений R_{0ij} в сфероидальной системе координат [2]

$$R_{0\zeta\zeta} = \frac{2h\sin^2\psi\, e^{2i\varphi}}{s-2i\omega}, \quad R_{0\zeta\theta} = -\frac{2h\sin\psi\cos\psi\, e^{2i\varphi}}{s-2i\omega}, \tag{18}$$
$$R_{0\zeta\varphi} = -\frac{2ih\sin\psi\, e^{2i\varphi}}{s-2i\omega},$$

где

$$\sin\psi = \zeta\left(\frac{1-\mu^2}{\zeta^2+\mu^2}\right)^{1/2}, \quad \cos\psi = \mu\left(\frac{1+\zeta^2}{\zeta^2+\mu^2}\right)^{1/2}, \quad \mu = \cos\vartheta. \tag{19}$$

Для учета эффекта малой вязкости служит уравнение (9) и граничные условия (10) и (11). Умножив уравнение (10) на $P_2^2(\mu)\,e^{-2i\varphi}$ и проинтегрировав по всей поверхности сфероида, получим

$$\frac{1}{3}\rho a^2 h\left[1 + \frac{Q - B_s^2/2\pi\rho a^2}{s(s-2i\omega)}\right] + \Gamma = 0. \tag{20}$$

Здесь использована теория, развитая в статье [1], а Γ есть член, обусловленный вязкостью,

$$\Gamma = \frac{5}{96\pi}\int_{-1}^{1} d\mu \int_{0}^{2\pi} d\varphi\,[\Phi_1 + \rho\Pi_1 - 2\nu\rho R_{0\zeta\zeta}]_{s_e}\, P_2^2(\mu)\, e^{-2i\varphi}. \tag{21}$$

Легко убедиться, что гравитационный эффект отклонений ξ_1 дает [2]

$$[\rho V_1]_{S_e} = \frac{\pi G\rho^2}{2e^5}\left[\frac{3}{2}\arcsin e - (3-2e^2)(1-e^2)^{1/2}\right][h_\zeta \xi_{1\zeta}]_{S_e}. \tag{22}$$

Можно получить также, что

$$[\vec{\xi}_1 \operatorname{grad} p_e]_{S_e} = -\frac{4\pi G\rho^2}{e^4}(1-e^2)\left[e(1-e^2)^{-1/2} - \arcsin e\right][h_\zeta \xi_{1\zeta}]_{S_e} \tag{23}$$

и, следовательно,

$$[\Phi_1]_{S_e} = [\rho V_1 + \vec{\xi}_1 \operatorname{grad} p_e]_{S_e} = -\frac{\pi G\rho^2}{2e^6}\left[e(1-e^2)^{1/2}(3+10e^2) - \right.$$

$$\left. -(3+8e^2-8e^4)\arcsin e\right][h_\zeta \xi_{1\zeta}]_{S_e}. \tag{24}$$

Используя определение $Q(e)$, можно записать

$$[\Phi_1]_{S_e} = -\rho\frac{Q(e)}{2e(1-e^2)^{1/2}}[h_\zeta \xi_{1\zeta}]_{S_e} \tag{25}$$

или [1]

$$[\Phi_1]_{S_e} = -\rho\frac{Q(1+E^2)}{2sE}[h_\zeta u_{1\zeta}]_{S_e}, \tag{26}$$

с учетом которого для Γ получаем

$$\Gamma = \frac{5\rho}{32\pi}\int_{-1}^{1}d\mu\int_{0}^{2\pi}d\varphi\left[\Pi_1 - \frac{1+E^2}{2sE}Q(h_\zeta u_{1\zeta}) - 2\nu R_{0\zeta\zeta}\right]_{S_e}(1-\mu^2)e^{-2i\varphi}. \tag{27}$$

Для вычисления Γ обратимся к уравнению (9). Запишем вектор $4\pi\rho\vec{A} = [\vec{B}_e \operatorname{rot}\vec{B}_1] + [\vec{B}_1 \operatorname{rot}\vec{B}_e]$ в системе сплющенных сфероидальных координат. Опираясь на априорные предположения (эффект вязкости дает тангенциальные составляющие скорости) [2]

$$u_{1\theta} \sim 0(\nu^{1/2}),\ \ u_{1\varphi} \sim 0(\nu^{1/2}),\quad \frac{\partial}{\partial\zeta} \sim 0(\nu^{-1/2}),$$

$$u_{1\zeta} \sim 0(\nu),\quad \Pi_1 \sim 0(\nu),\quad \frac{\partial}{\partial\theta} \sim 0(1),\quad \frac{\partial}{\partial\varphi} \sim 0(1) \tag{28}$$

и предполагая малость магнитного поля по порядку величины

$$B_e \sim 0(\nu^{1/4}), \tag{29}$$

с учетом

$$\vec{B}_1 = (\vec{B}_e\nabla)\vec{\xi}_1 \tag{30}$$

в приближении $\nu^{1/2}$ можно записать

$$4\pi\rho\vec{A} = \frac{B_e^2}{a^2}\hat{e}_\zeta\left\{\frac{h_\varphi}{h_\zeta}\frac{\partial^2\xi_{1\varphi}}{\partial\varphi\partial\zeta} + \frac{h_\psi}{h_\zeta}\cos\psi\frac{\partial\xi_{1\theta}}{\partial\zeta}\right\}, \tag{31}$$

где $\hat{e}_\zeta$ — единичный вектор в направлении возрастания ζ.

В результате уравнения (9) примут следующий вид:

$$\left(\frac{\nu}{h_\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-s\right)u_{1\theta}+2\omega\cos\psi\, u_{1\varphi}=0, \tag{32}$$

$$\left(\frac{\nu}{h_\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-s\right)u_{1\varphi}-2\omega\cos\psi\, u_{1\theta}=0, \tag{33}$$

$$\frac{1}{h_\zeta}\frac{\partial\Pi_1}{\partial\zeta}=2\omega u_{1\varphi}\sin\psi-\sigma^2\frac{h_\varphi}{h_\zeta}\left[2i\frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial\zeta}+\cos\psi\frac{\partial u_{1\theta}}{\partial\zeta}\right], \tag{34}$$

$$(1+E^2)h_\zeta\frac{\partial u_{1\zeta}}{\partial\zeta}-\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)^{1/2}h_\theta u_{1\theta}\right]+\frac{2ik(E^2+\mu^2)u_{1\varphi}}{(1+E^2)^{1/2}(1-\mu^2)^{1/2}}=0, \tag{35}$$

где $k=ae$, σ — частота альвеновских волн на экваторе сфероида

$$\sigma^2=\frac{B_s^2}{4\pi\rho a^2}. \tag{36}$$

Во всех этих уравнениях h_ζ и h_θ посчитаны на поверхности $\zeta=E$, так что они являются функцией только от μ. Далее предполагается, что все параметры системы зависят от φ по закону $e^{2i\varphi}$.

Очевидно, что решения системы уравнений (32) и (33), которые обращаются в нуль в центре сфероида, есть

$$u_{1\theta}=\frac{1}{2}A(\theta,\varphi)e^{\alpha(\zeta-E)}+\frac{1}{2}B(\theta,\varphi)e^{\beta(\zeta-E)}, \tag{37}$$

$$u_{1\varphi}=-\frac{i}{2}A(\theta,\varphi)e^{\alpha(\zeta-E)}+\frac{i}{2}B(\theta,\varphi)e^{\beta(\zeta-E)}, \tag{38}$$

где α и β — положительные и большие числа [2]. Значения коэффициентов A и B можно определить из граничного условия (11). С учетом (18) получим

$$A=\frac{4khE}{\alpha(1+E^2)^{1/2}(s-2i\omega)}(\cos\psi-1)(1-\mu^2)^{1/2}e^{2i\varphi},$$

$$B=\frac{4khE}{\beta(1+E^2)^{1/2}(s-2i\omega)}(\cos\psi+1)(1-\mu^2)^{1/2}e^{2i\varphi}. \tag{39}$$

Комбинируя уравнения (35) и (36), легко получить выражение

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(1-\mu^2)\left[\Pi_1-\frac{(1+E^2)Q}{2sE}(h_\zeta u_{1\zeta})\right|_{S_e}\right\}=2\omega h_\zeta(1-\mu^2)\sin\psi\, u_{1\varphi}+$$

$$+\frac{Q(E^2+\mu^2)h_\zeta}{sE^2}\sin\psi\,(iu_{1\varphi}-\cos\psi\, u_{1\theta})-\sigma^2(1-\mu^2)h_\varphi\left(2i\frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial\zeta}+\cos\frac{\partial u_{1\theta}}{\partial\zeta}\right), \tag{40}$$

интегрирование которого по ζ в интервале $(0, E)$ с учетом

$$[\Pi_1]_{\zeta=0}=\left[\vec{u}_1\right]_{\zeta=0}=0 \tag{41}$$

дает

$$(1-\mu^2)\left[\Pi_1-\frac{(1+E^2)Q}{2sE}(h_\zeta u_{1\zeta})\right]_{S_e}=\int_0^E 2\omega h_\zeta(1-\mu^2)\sin\psi\, u_{1\varphi}\,d\zeta+$$

$$+\int\limits_0^E \frac{Qh_\zeta(E^2+\mu^2)}{sE^2}\sin\psi\,(iu_{1\varphi}-\cos\psi\,u_{1\theta})-\sigma^2(1-\mu^2)\,h_\zeta(2\,iu_{1\varphi}+\cos\psi u_{1\theta}). \tag{42}$$

Отметим, что все наши преобразования имеют цель получить подынтегральное выражение Г, которое представляет собой (42) с добавлением слагаемого

$$[2\nu R_{0\zeta\zeta}]_{S_e}=\frac{4\,h\nu\,E^2\,(1-\mu^2)\,e^{2i\varphi}}{(E^2+\mu^2)\,(s-2\,i\omega)}. \tag{43}$$

Выполнив интегрирования в (27), окончательно получим

$$\Gamma=\frac{1}{3}\rho a^2h\left[\frac{2\,\nu P(e)}{s-2i\omega}+\frac{2\,i\omega T(e)}{s-2\,i\omega}+\frac{2\,L(e)}{s\,(s-2\,i\omega)}\right], \tag{44}$$

где $T(e)$, $L(e)$ — действительные функции порядка ν, а функция

$$P(e)=\frac{5}{8}\,\frac{1-e^2}{e^5}\left[3\,(1-e^2)^{1/2}\,(5-2\,e^2-e^4)\arcsin e-e^3\,(5\,e^2+6)\right] \tag{45}$$

положительна при $0\leqslant e\leqslant 1$.

Теперь соотношение (20) примет следующий вид:

$$1+\frac{Q-2\sigma^2+2\,L(e)}{s\,(s-2\,i\omega)}+\frac{2\,\nu P(e)+i\omega\,T(e)}{s-2\,i\omega}=0. \tag{46}$$

Это есть искомое дисперсионное соотношение для гармоники $n=m=2$, в котором пренебрежены все члены высшего порядка ν.

Представим решение уравнения (46) в виде

$$s=s_0+s_1, \tag{47}$$

где s_0 есть корень уравнения (16), а s_1 имеет порядок ν. Подставляя (47) в уравнение (46) и пренебрегая всеми величинами высшего порядка по ν, с учетом (16) получим [2]

$$s_1=\frac{\nu\,P(e)\,s_0^2}{Q_e-2\,\sigma^2}+\frac{i\omega\;T(e)\,s_0^2+L(e)\,s_0}{Q-2\,\sigma^2}. \tag{48}$$

Величина s_0^2 отрицательна до значения $e=0{,}9529$, так что поведение s_1 зависит от знака величины $Q(e)-2\sigma^2$, где $Q(e)>0$ при $e<0{,}8127$ и $Q(e)<0$ при $0{,}8127<e<0{,}9529$. Обозначим решение уравнения $Q(e)-2\sigma^2=0$ через e_1. Отсюда вытекает, что до точки e_1 величина $\nu P(e)\,s_0^2/(Q(e)-2\sigma^2)$ отрицательна, что указывает на устойчивость сфероида Маклорена (возмущения исчезают с экспоненциально уменьшающейся амплитудой). Второй член (48) не играет роли в вопросе устойчивости, он лишь изменяет частоту колебания, поскольку $[L(e)\,s_0+i\omega\;T(e)\,s_0^2]/(Q-2\,\sigma^2)$ — чисто мнимая величина до значения $e=0{,}9529$. За точкой e_1 сфероид неустойчив.

Итак, сфероид Маклорена при наличии тороидального поля и малой вязкости устойчив по отношению к малым возмущениям до значения $e=e_1$ и колеблется с частотой, отличной от частоты невязкой жидкости; за точкой e_1 колебания сфероида перестают быть устойчивыми; с увеличением магнитного поля (в рамках сделанного предположения) предел устойчивости отклоняется влево от точки $e = 0{,}8127$.

Так как в уравнение движения магнитное поле входит в квадратичной форме, из хода изложения следует, что магнитные поля выше порядка $\nu^{1/4}$ не влияют на устойчивость вязкого сфероида Маклорена. Отметим, что при отсутствии магнитного поля полученные результаты совпадают с результатами работы [2], а при отсутствии вязкости — с результатами статьи [1].

С энергетической точки зрения эффект вязкости приводит к тому, что выше точки нейтральной стабильности (при $\vec{B}=0$) $e=0{,}8127$ (точка бифуркации) энергетически выгодными состояниями являются не сфероиды Маклорена, а трехосные эллипсоиды Якоби, и начиная с этой точки устойчивыми фигурами равновесия являются эллипсоиды Якоби [3].

При наличии магнитного поля (невязкая задача), как показано в работе [1], точка нейтральной стабильности перемещается влево ($e_1 \leqslant 0{,}8127$), так что одновременный учет магнитного поля и вязкости приводит к тому, что выше точки e_1 энергетически выгодными состояниями являются иные фигуры, форма которых подлежит определению.

Полученный результат представляет интерес для магнитогидродинамической теории устойчивости фигур, а также может найти качественное применение в астрофизических приложениях.

Ереванский государственный
университет

Поступила 28.VIII.1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян.* Изв. АН АрмССР, Физика, 7, 449 (1972).
2. *P. H. Roberts, K. Stewartson.* Ap. Journal, 137, 777 (1963).
3. *С. Чандрасекхар.* Эллипсоидальные фигуры равновесия, Изд. Мир, 1973.

ՄԱԿԼՈՐԵՆԻ ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՍՖԵՐՈԻԴՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱՀԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ռ. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Մ. Գ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ, Վ. Լ. ՀԵՔԵԼԵԿՅԱՆ

Ուսումնասիրված է Մակլորենի սֆերոիդների կայունության հարցը թորոիդալ մագնիսական դաշտի և փոքր մածուցիկության առկայության դեպքում սֆերոիդալ մարմինների կայունության տեսության մեջ որոշիչ հանդիսացող $m=n=2$ *տիպի տատանումների նկատմամբ։ Գծային տեսության շրջանակներում հաստատված է, որ փոքր կինեմատիկ մածուցիկությունը* (ν) *փոքր թորոիդալ մագնիսական դաշտի* ($\nu^{1/4}$) *առկայությամբ աջ է շեղում կայունության սահմանային կետը ճյուղավորման կետից և փոփոխում է տատանումների հաճախությունը։ Պարզաբանված է նաև, որ* ν^r *կարգի մագնիսական դաշտերը* $r > 0{,}25$ *դեպքում քննարկվող սֆերոիդների կայունության վրա ազդեցություն չեն թողնում։*

ON THE MAGNETOHYDRODYNAMIC THEORY OF STABILITY OF VISCOUS MACLAURIN SPHEROIDS

R. S. HOVHANNESSYAN, M. G. ABRAHAMYAN, V. L. HEUKELEKYAN

The problem of Maclaurin spheroids stability in the presence of toroidal magnetic field is considered with due regard for small viscousity relative to $n = m = 2$ type of excitations which are predominant in the theory of spheroids stability. It was shown in the linear theory framework, that the small kinematic viscosity ν in the presence of low order toroidal magnetic field $\nu^{1/4}$ deflects the limiting point of stability to the left from bifuraction point and changes the oscillation frequency. It was also shown that magnetic fields of the order of ν^{r} had no effect on the stability of the spheroids when $r > 0{,}25$.