

ОПИСАНИЕ ПОЛЕЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПУЧКОВ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВБЛИЗИ КАУСТИЧЕСКОЙ
ПОВЕРХНОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ
СРЕДЕ

Э. Д. ГАЗАЗЯН, А. Д. ТЕР-ПОГОСЯН

В работе [1] исследовался вопрос об описании полей вблизи каустик с помощью функций Эйри. В работах [2] и [3] этот вопрос рассматривался для случая осесимметричных волн в скалярном и электромагнитном вариантах без учета неоднородности среды. В настоящей работе делается попытка описания осесимметричных пучков электромагнитных волн в неоднородной диэлектрической среде с помощью функций Бесселя и их производной.

Будем искать решения уравнений Максвелла в неоднородной среде для осесимметричных пучков электромагнитных волн в виде

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \left\{ \vec{A}(\eta, \rho) J_m(k\rho) + \frac{\vec{B}(\eta, \rho)}{ik} \rho \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} \right\} e^{ik(\eta + \rho_0\varphi)}, \\ \vec{H} &= \left\{ \vec{C}(\eta, \rho) J_m(k\rho) + \frac{\vec{D}(\eta, \rho)}{ik} \rho \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} \right\} e^{ik(\eta + \rho_0\varphi)}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь η, ρ, φ — координатные функции, подлежащие определению, $J_m(k\rho)$ — функция Бесселя m -го порядка, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2 J_m(k\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} + k^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) J_m(k\rho) = 0, \quad \rho_0 = \frac{m}{k}. \quad (2)$$

Решения (1) уравнений Максвелла представим в виде разложения по степеням параметра $\frac{i}{k}$. Если выбрать ортогональную сетку координатных функций η, ρ, φ и ввести тройку единичных векторов $\vec{n}_1, \vec{b}_1,$

$$\vec{t}_1 = \frac{\vec{\gamma}}{\sqrt{\epsilon}} \text{ и } \vec{n}_2, \vec{b}_2, \vec{t}_2 = \frac{\vec{\delta}}{\sqrt{\epsilon}}, \text{ где}$$

$$\vec{\gamma} = \vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\eta + \rho_0 \vec{\nabla}\varphi, \quad \vec{\delta} = -\vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\eta + \rho_0 \vec{\nabla}\varphi, \quad \vec{\nabla}\psi = \sqrt{1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}} \vec{\nabla}\rho,$$

то для геометро-оптических полей в нулевом приближении получим*

* Более подробное объяснение используемых обозначений можно найти в [3].

$$\begin{aligned}\vec{M}_0 &= \vec{n}_1 \Phi_1 + \vec{b}_1 \Phi_2, & \vec{P}_0 &= -\vec{n}_1 \Phi_2 + \vec{b}_1 \Phi_1, \\ \vec{N}_0 &= \vec{n}_2 F_1 + \vec{b}_2 F_2, & \vec{Q}_0 &= -\vec{n}_2 F_2 + \vec{b}_2 F_1, \\ [\vec{n}_1 \vec{b}_1] &= \vec{t}_1, & [\vec{n}_2 \vec{b}_2] &= \vec{t}_2.\end{aligned}\quad (3)$$

Для определения амплитудных функций Φ_1 , Φ_2 , F_1 и F_2 исходим из системы уравнений Максвелла, записанной для первого приближения по малому параметру $\frac{i}{k}$. Это приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \{ (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \sqrt{\varepsilon} \vec{t}_1 \} &= 0, & \operatorname{div} \{ (F_1^2 + F_2^2) \sqrt{\varepsilon} \vec{t}_2 \} &= 0, \\ \frac{d\sigma_1}{d\sigma_1} &= -\frac{1}{T_1}, & \frac{d\sigma_2}{d\sigma_2} &= -\frac{1}{T_2},\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$T_1 = \frac{2}{\vec{n}_1 \operatorname{rot} \vec{n}_1 + \vec{b}_1 \operatorname{rot} \vec{b}_1}, \quad T_2 = \frac{2}{\vec{n}_2 \operatorname{rot} \vec{n}_2 + \vec{b}_2 \operatorname{rot} \vec{b}_2},$$

σ_1 — длина луча вдоль $\vec{t}_1$, σ_2 — длина луча вдоль $\vec{t}_2$.

Первые два уравнения описывают изменение интенсивностей $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$ и $F_1^2 + F_2^2$ вдоль лучей, тогда как третье и четвертое уравнения описывают поведение плоскости поляризации пар векторов $\vec{M}_0$, $\vec{P}_0$ и $\vec{N}_0$, $\vec{Q}_0$ вдоль лучей относительно троек векторов $\vec{n}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{t}_1$ и $\vec{n}_2$, $\vec{b}_2$, $\vec{t}_2$.

Окончательно решения уравнений Максвелла в нулевом приближении запишутся так

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{2} \left\{ (\vec{M}_0 + \vec{N}_0) \sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} J_m(k\rho) + \frac{\vec{M}_0 - \vec{N}_0}{ik'} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} \right\} e^{ik(\eta + \rho_0 \tau)}, \\ \vec{H} &= \frac{1}{2} \left\{ (\vec{P}_0 + \vec{Q}_0) \sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} J_m(k\rho) + \frac{\vec{P}_0 - \vec{Q}_0}{ik} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} \right\} e^{ik(\eta + \rho_0 \tau)}.\end{aligned}\quad (5)$$

Для того, чтобы решения лучевого разложения не расходились на каустике $\rho = \rho_0$, потребуем, чтобы на каустике выполнялись равенства $\vec{M}_0 = \vec{N}_0$ и $\vec{P}_0 = \vec{Q}_0$. Если еще учесть, что на каустике имеют место условия $\vec{\nabla} \psi = 0$, $\vec{t}_1 = \vec{t}_2$, $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ и $\vec{b}_1 = \vec{b}_2$, то из (3) получим эквивалентные требования при $\rho = \rho_0$

$$\Phi_1 = F_1, \quad \Phi_2 = F_2.$$

Рассмотрим дебаевскую асимпотику, т. е. распишем поля (5) при $\rho > \rho_0$ (в области света)

$$J_m(k\rho) \simeq \sqrt{\frac{2}{k\pi}} (\rho^2 - \rho_0^2)^{-\frac{1}{4}} \cos \alpha,$$

$$\rho \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} \simeq -k \sqrt{\frac{2}{k\pi}} (\rho^2 - \rho_0^2)^{\frac{1}{4}} \sin \alpha, \quad (6)$$

$$\alpha = k \left[(\rho^2 - \rho_0^2)^{1/2} - \rho_0 \arccos \frac{\rho_0}{\rho} \right] - \frac{\pi}{4} = k\psi - \frac{\pi}{4}.$$

Подставляя (6) в (5), получаем выражения

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \left\{ \vec{M}_0 e^{ik\psi} + \vec{N}_0 e^{-ik\psi + i\frac{\pi}{2}} \right\} e^{ik(\eta + \rho_0\varphi) - i\frac{\pi}{4}},$$

$$\vec{H} = \frac{V_{\varepsilon}}{\sqrt{2k\pi}} \left\{ \vec{P}_0 e^{ik\psi} + \vec{Q}_0 e^{-ik\psi + i\frac{\pi}{2}} \right\} e^{ik(\eta + \rho_0\varphi) - i\frac{\pi}{4}}, \quad (7)$$

которые позволяют трактовать $\vec{E}$ и $\vec{H}$ как сумму падающих и отраженных волн, причем тройка ортогональных векторов $\vec{M}_0, \vec{P}_0, \vec{\gamma}$ соответствует лучам, «саждающимся» на каустику, а тройка $\vec{N}_0, \vec{Q}_0, \vec{\delta}$ — лучам, «срывающимся» с каустики. Точка пересечения этих лучей будет на каустике

$$\vec{M}_0 = \vec{N}_0, \quad \vec{P}_0 = \vec{Q}_0, \quad \vec{\gamma} = \vec{\delta}.$$

Запишем асимпотику для поля в области каустической тени ($\rho < \rho_0$)

$$J_m(k\rho) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} (\rho_0^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{4}} \exp \left[k \left(\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2} - \rho_0 \operatorname{arch} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right],$$

$$\frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \left\{ \frac{\rho}{2} (\rho_0^2 - \rho^2)^{-1-\frac{1}{4}} + \frac{k}{\rho} (\rho_0^2 - \rho^2)^{\frac{1}{4}} \right\} \times$$

$$\times \exp \left[k \left(\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2} - \rho_0 \operatorname{arch} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right]. \quad (8)$$

Подставив (8) в (5), получим

$$\vec{E} = \frac{V_{\varepsilon}}{2\sqrt{2\pi k}} \left\{ 2\vec{N}_0 - \frac{\vec{M}_0 - \vec{N}_0}{2k} \frac{\rho^2}{(\rho_0^2 - \rho^2)^{3/2}} \right\} \exp \left[k \left(\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2} - \rho_0 \operatorname{arch} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right] \exp [ik(\eta + \rho_0\varphi)],$$

$$\vec{H} = \frac{V_{\varepsilon}}{2\sqrt{2\pi k}} \left\{ 2\vec{Q}_0 - \frac{\vec{P}_0 - \vec{Q}_0}{2k} \frac{\rho^2}{(\rho_0^2 - \rho^2)^{3/2}} \right\} \exp \left[k \left(\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2} - \rho_0 \operatorname{arch} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right] \exp [ik(\eta + \rho_0\varphi)].$$

Устремим теперь $\rho \rightarrow \rho_0$, т. е. будем подходить к каустике со стороны каустической тени. При этом $\exp \left[k \left(\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2} - \rho_0 \operatorname{arsh} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right] \rightarrow \exp \left(-k\rho_0 \ln \frac{\rho_0}{\rho} \right)$, т. е. поля вблизи каустики затухают по закону $\exp \left(-k\rho_0 \ln \frac{\rho_0}{\rho} \right)$.

Как показано в [1], проведенное исследование справедливо, если диэлектрическая проницаемость среды ϵ отлична от нуля. В случае плоско-слоистей среды необходимо потребовать выполнения условий $\Phi_1 = F_1$ и $\Phi_2 = F_2$ не только на каустике, но и во всем пространстве.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю. А. Крауцов. Изв. вузов, Радиофизика, 7, 1049 (1964).
2. В. И. Токачлы, Б. Е. Кинбер. Изв. вузов, Радиофизика, 14, 761 (1971).
3. Э. Д. Газазян, Б. Е. Кинбер. Изв. вузов, Радиофизика, 14, 1221 (1971).

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԵՏԱԿԱՆ ԱԼԻՔԻ ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ-ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՓՆՋԻ
ԵԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿԱՌԻՍՏԻԿ ՄԱԿԵՐԵՎՈՅԹԻ ՄՈՏ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ
ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Է. Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ, Ա. Դ. ՏԵՐ-ՊՈԳՈՍՅԱՆ

Հոդվածում ստացված են արտահայտություններ էլեկտրամագնիսական դաշտի համար անհամասեռ դիէլեկտրիկ միջավայրում: Հետազոտված են այդ արտահայտությունները կառուտիկայի վրա և նրանց նվազման օրենքը ստվերում:

DESCRIPTION OF AXIALLY-SYMMETRIC ELECTROMAGNETIC FIELDS AT CAUSTICAL SURFACES IN INHOMOGENEOUS DIELECTRIC MEDIUM

E. D. GAZAZIAN, A. D. TER-POGOSSIAN

Formulae for electromagnetic fields in inhomogeneous dielectric medium are expressed in terms of Bessel functions and their derivatives are obtained. The behaviour of field amplitudes at caustical surfaces is investigated as well.