

ПРОЕКЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ШАРОМ

В. А. САФАРЯН

Проекционным методом решена задача о прямоугольном резонаторе с диэлектрическим шаром. Составлена программа для ЭВМ „Раздан-3“. Обсуждаются результаты расчета.

Введение

Полые резонаторы, содержащие диэлектрические и, особенно, гиротропные тела (намагниченные ферриты), находят различное применение в радиотехнике и радиофизических исследованиях. Однако до сих пор в литературе почти отсутствуют точные сведения о полях и собственных частотах резонаторов с включениями, нарушающими регулярность. Между тем в настоящее время разработаны эффективные способы расчета таких резонаторов, к числу которых относятся модификации метода Галеркина [1]. Сходимость метода в данном случае гарантирована, т. е. с увеличением порядка получаемой системы уравнений приближенное решение может как угодно мало отличаться от точного. В [1] приведены некоторые примеры решения резонаторных задач с применением ЭВМ; большая часть данных относится к резонаторам с включениями в виде параллелепипеда. Дальнейшие приложения метода Галеркина в этой области, насколько известно, в литературе не появлялись. В частности, представляющие принципиальный, а также технический интерес резонаторы с шарообразными телами еще не исследовались.

Целью настоящей работы является применение метода Галеркина для построения алгоритма решения задачи о собственных колебаниях резонатора в виде параллелепипеда с диэлектрическим шаром переменного радиуса в центре.

Алгоритм, который понадобится для исследования резонатора с ферритовым шаром, будет мало отличаться от предлагаемого и настоящую работу можно рассматривать как подготовительный этап в этом направлении, а также шаг к изучению ферритовых резонаторов.

1. Описание алгоритма

Алгоритм построен на основе обращения алгебраической формулировки (8.17) работы [1]. Матричное уравнение при этом принимает вид

$$\tilde{\mathcal{E}} \mathcal{Q}^{-1} \hat{M} \mathcal{Q}^{-1} a = \frac{1}{(\omega^N)^2} a, \quad (1)$$

где $a = (a_1, a_2 \dots a_N)$ — вектор коэффициентов представления электрической индукции

$$\vec{D} = \varepsilon \sum_{n=1}^N a_n \vec{E}_n, \quad (2)$$

а $\check{\Omega} \Omega^{-1} \check{M} \Omega^{-1}$ — матрица, составленная как произведение матриц с элементами

$$\begin{aligned} \check{\Omega}_{ij} &= \int_V \varepsilon \vec{E}_i \vec{E}_j^* dv, \\ \check{M}_{ij} &= \int_V \mu \vec{H}_i \vec{H}_j^* dv, \\ \Omega_j^{-1} &= \frac{1}{\omega_j} \delta_j. \end{aligned} \quad (3)$$

Индексы i и j понимаются как совокупности трех чисел

$$i = (m, n, p), \quad j = (m', n', p'),$$

ω_j — собственные частоты пустого резонатора. Отметим, что функции

базиса \vec{E}_i и \vec{H}_i ортонормированы в виде

$$\varepsilon_0 \int_V \vec{E}_i \vec{E}_j^* dv = \delta_{ij}, \quad \mu_0 \int_V \vec{H}_i \vec{H}_j^* dv = \delta_{ij}. \quad (4)$$

В случае диэлектрического образца $\check{M} = I$ (единичная матрица) и уравнение (1) переходит в следующее

$$\check{\Omega} \Omega^{-2} \alpha = \frac{1}{(\omega^N)^2} \alpha. \quad (5)$$

Вычисление собственных частот резонатора, содержащего диэлектрическое тело, сводится к нахождению собственных чисел матрицы. В работе решается система уравнений (5), дающая коэффициенты представления (2).

Заменим в (3) интеграл по V суммой интегралов по областям с постоянными диэлектрическими проницаемостями. Используя условия нормировки (4), будем иметь

$$\int_V \varepsilon \vec{E}_i \vec{E}_j^* dv = \varepsilon_0 \int_{V-\Delta V} \vec{E}_i \vec{E}_j^* dv + \varepsilon \int_{\Delta V} \vec{E}_i \vec{E}_j^* dv = \delta_{ij} + (\varepsilon - \varepsilon_0) \int_{\Delta V} \vec{E}_i \vec{E}_j^* dv,$$

где ΔV — объем шара.

В случае диэлектрического шара, расположенного симметрично, как показано на рис. 1, после подстановки вихревых базисных функций ([1], приложение к гл. 1) исходной формулой для расчета матричных элементов

$\check{\Omega}_{ij}$ будет

$$\begin{aligned} \check{\Omega}_{ij} &= \delta_{ij} + \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_{\Delta V} \left[(A_x)_i \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{p\pi}{c} z (A_x)_j \sin \frac{m'\pi}{a} x \cos \frac{n'\pi}{b} y \sin \frac{p'\pi}{c} z + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (A_y)_i \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{c} z + (A_y)_j \cos \frac{m'\pi}{a} x \sin \frac{n'\pi}{b} y \sin \frac{p'\pi}{c} z + \\
 & + (A_z)_i \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{p\pi}{c} z + (A_z)_j \cos \frac{m'\pi}{a} x \cos \frac{n'\pi}{b} y \cos \frac{p'\pi}{c} z \Big] dv,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где A_x , A_y , A_z — постоянные коэффициенты, a , b , c — размеры резонатора в произвольных единицах длины l .

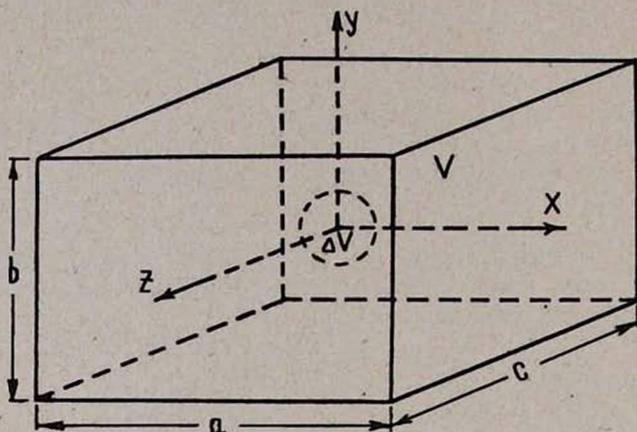


Рис. 1.

Интегрирование по шару производится следующим образом. Шар представляется в виде системы цилиндрических слоев (рис. 2), имеющих

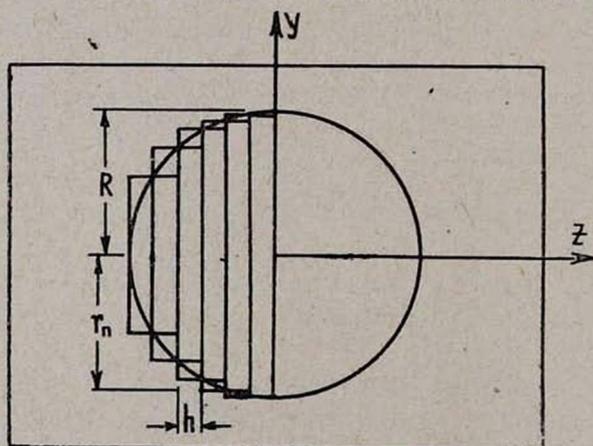


Рис. 2.

одну и ту же толщину при всех R ($h = \frac{R}{\bar{N}} = 0,0025$). Радиусы цилиндрических слоев вычисляются по формуле

$$r_n = h \sqrt{\bar{N}^2 - \bar{n}^2}, \quad \bar{n} = 1, 2, \dots, \bar{N}.$$

Заменив в (6) произведения тригонометрических функций их суммами и разностями, перейдя затем от декартовых координат к цилиндрическим и используя для преобразования аргументов формулу

$$A \cos \varphi \pm B \sin \varphi = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\varphi \mp \varphi_0),$$

под интегралом получим выражения типа

$$\cos \left[\pi r_{\bar{n}} \sqrt{\left(\frac{m \pm m'}{a} \right)^2 \pm \left(\frac{n \pm n'}{b} \right)^2} \cos(\varphi \mp \varphi_0) \right].$$

Проинтегрировав по φ , а затем по r , для \bar{n} -ого цилиндрического слоя $\Delta V_{\bar{n}}$ окончательно получим

$$\delta_{ij} + (\varepsilon - \varepsilon_0) \int_{\Delta V_{\bar{n}}} \vec{E}_i \vec{E}_j dv = \delta_{ij} + 2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) r_{\bar{n}} \Phi(r_{\bar{n}}).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi(r_{\bar{n}}) &= P_x + P_y + P_z, \\ P_x &= \frac{mm'pp'(\sigma - q)(I_1 - I_2 + I_3 - I_4)}{a^3bc^3vwv'w'}, \\ P_y &= \frac{nn'pp'(\sigma - q)(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)}{ab^3c^3vwv'w'}, \\ P_z &= \frac{(\sigma + q)(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)vwv'}{abcwv'w'}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sigma = \frac{c}{(p - p')\pi} \sin \frac{p - p'}{c} \pi h,$$

$$q = \frac{c}{(p + p')\pi} \sin \frac{p + p'}{c} \pi h,$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}, \quad v' = \sqrt{\left(\frac{m'}{a} \right)^2 + \left(\frac{n'}{b} \right)^2},$$

$$w = \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{p}{c} \right)^2}, \quad w' = \sqrt{\left(\frac{m'}{a} \right)^2 + \left(\frac{n'}{b} \right)^2 + \left(\frac{p'}{c} \right)^2},$$

причем при $p = p' \neq 0$ значение σ должно быть взято равным h , а при $p = p' = 0$ и σ , и q приравниваются h . Значения P_z при $p = 0$ или $p' = 0$ дополнительно умножаются на $1/\sqrt{2}$, а при $p = p' = 0$ — на $1/2$.

Далее, в (7) введены обозначения

$$I_{\bar{m}} = \frac{J_1(\pi r_{\bar{n}} z_{\bar{m}})}{z_{\bar{m}}} \quad (\bar{m} = 1, 2, 3, 4),$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка, а $z_{\bar{m}}$ принимают следующие значения:

$$z_1 = \sqrt{\left(\frac{m-m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n-n'}{b}\right)^2}, \quad z_2 = \sqrt{\left(\frac{m+m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n-n'}{b}\right)^2},$$

$$z_3 = \sqrt{\left(\frac{m-m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n+n'}{b}\right)^2}, \quad z_4 = \sqrt{\left(\frac{m+m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n+n'}{b}\right)^2}.$$

При $m = m'$ и $n = n'$

$$I_1 = \frac{\pi}{2} r_{\bar{n}}.$$

Переходя к шару и заменив интегрирование суммированием по формуле трапеций, окончательно получим

$$\dot{\Delta}_{ij} = \delta_{ij} + 2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left[\Phi(r_0) + 2 \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \Phi(r_{\bar{n}}) \right], \quad (8)$$

где $r_0 = R$ — радиус исследуемого шара.

Однородная система уравнений (5) решалась итерационным методом ([2], гл. XII, § 11). Находилось наибольшее собственное значение матрицы $1/(\omega^N)^2$, позволяющее вычислить приближенное значение низшей собственной частоты резонатора ω_1^N и соответствующий собственный вектор матрицы a , дающий коэффициенты a_n представления (2) индукции основного типа колебаний. В таблицах и на графиках численные значения ω_1^N даны в виде волновых чисел

$$k_1^N = \omega_1^N \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0},$$

выраженных в единицах $[l^{-1}]$.

Автором была составлена программа на языке АЛГОЛ, которая эксплуатировалась на ЭВМ «Раздан-3».

3. Результаты расчетов

В расчетах был использован базис из 20 функций

$$\begin{array}{ccccccccc} E_{110} & E_{130} & E_{150} & E_{310} & E_{510} & E_{330} & E_{350} & E_{530} \\ E_{112} & E_{132} & E_{152} & E_{312} & E_{512} & E_{332} & E_{352} & E_{532} \\ E_{114} & E_{134} & & E_{314} & & E_{334} & & \end{array}$$

Для проверки вычислений рассматривался также случай с другим базисом, а именно, содержащим как Е-поля, так и Н-поля. Как и следовало ожидать, последние не внесли какого-либо вклада.

В качестве теста были вычислены собственные частоты резонатора с цилиндрическим образцом длиной c , расположенным вдоль z , при двух радиусах цилиндра, поскольку эти данные можно сравнить с имеющимися в литературе [1]. Как видно из сравнения данных, приведенных в табл. 1, получаемые результаты достоверны.

Большее расхождение при малом радиусе цилиндра естественно; заметим, что число «работающих» базисных функций в данном случае было

Таблица 1

$2R/a$	k_1^N [1] ($\varepsilon = 10 \varepsilon_0$)	k_1^N ($\varepsilon = 10 \varepsilon_0$)
0,2	2,81825	2,86174
1	1,40864	1,40865

меньше, чем в [1], поскольку из базиса, приведенного выше, не использовались все функции с отличным от нуля третьим индексом.

Для этого же резонатора были получены также данные, не имеющиеся в литературе, а именно, при радиусе $\frac{2R}{a} = 1$ и $\varepsilon = 20 \varepsilon_0$ — $k_1^N = 0,99621$ а при $\varepsilon = 30 \varepsilon_0$ — $k_1^N = 0,81344$.

Основные результаты расчета относятся к резонатору со сферическим образцом, показанному на рис. 1. Как частный случай, рассматривался резонатор с равными сторонами. Значения k_1^N сведены в табл. 2.

Таблица 2

$\varepsilon = 10 \varepsilon_0$				$\varepsilon = 50 \varepsilon_0$	
$2R/a$	k_1^N	$2R/a$	k_1^N	$2R/a$	k_1^N
0	4,44288			0	4,44288
0,1	4,39694	0,6	1,93236	0,2	2,66440
0,2	4,05794	0,7	1,71617	0,4	1,28242
0,3	3,32778	0,8	1,55621	0,6	0,87985
0,4	2,67773	0,9	1,43456	0,8	0,69531
0,5	2,23508	1	1,34000	1	0,59273

Графики соответствующих коэффициентов представления (2) приведены на рис. 3 и 4. Все коэффициенты отнесены к a_1 . Рис. 5 показывает изменение собственной частоты резонатора в зависимости от диэлектрической проницаемости при разных размерах шара. Для этого же резонатора были проведены вычисления при уменьшении числа базисных функций, а именно, бралось 20, 15, 10 и 5 функций. Функции отбрасывались, начиная с высших номеров, в следующем порядке: 110, 130, 112, 310, 312, 132, 114, 150, 152, 510, 350, 512, 530, 352, 532, 330, 134, 314, 332, 334. Результаты приведены в табл. 3 и представлены графически на рис. 6. Они иллюстрируют сходимость процесса.

Таблица 3

$\varepsilon = 10 \varepsilon_0$				
$N \backslash 2R/a$	20	15	10	5
0,1	4,39694	4,39731	4,39750	4,39802
0,2	4,05794	4,07476	4,08292	4,10240
0,3	3,32778	3,38533	3,40342	3,47499
0,4	2,67713	2,73352	2,74187	2,82203

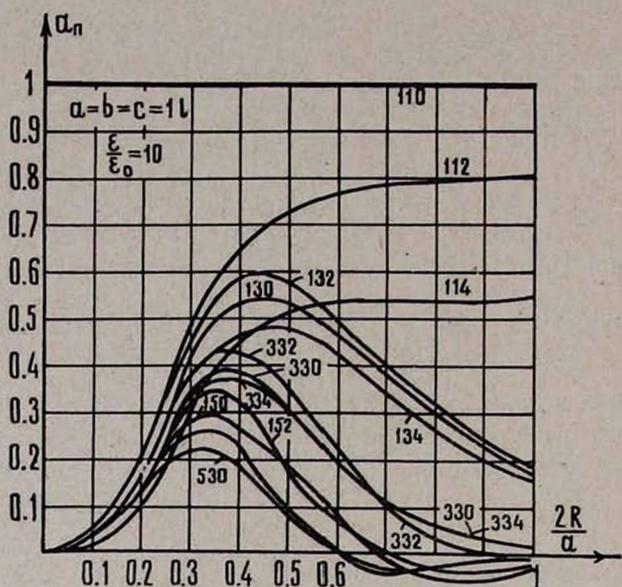


Рис. 3.

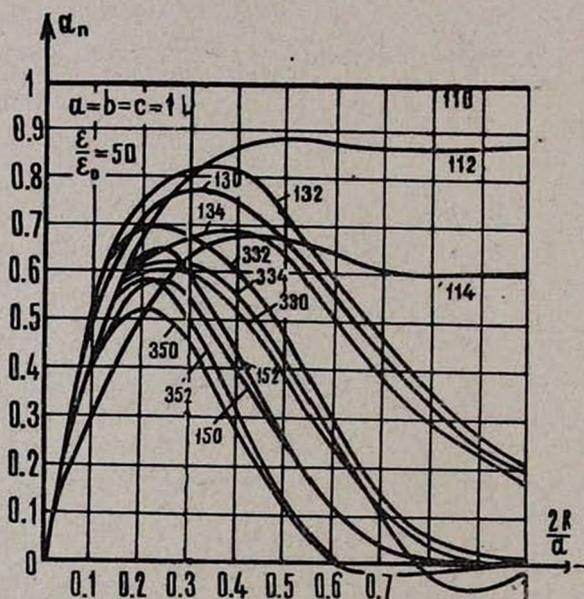


Рис. 4.

Для случая параллелепипеда со сторонами $a=b=2l$, $c=l$ и диэлектрической проницаемостью шара $\epsilon = 10 \epsilon_0$ результаты вычислений приведены в табл. 4, а соответствующие графики — на рис. 7.

В заключение отметим, что эксплуатация составленной программы на большой ЭВМ легко позволила бы увеличить базис и точность интегриро-

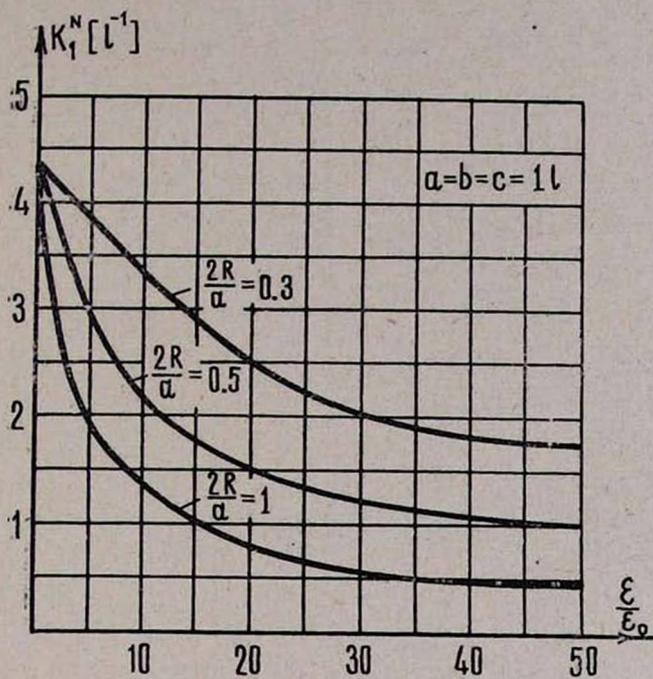


Рис. 5.

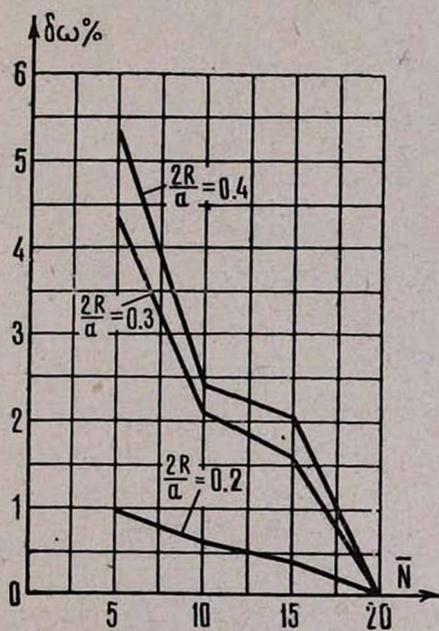


Рис. 6.

Таблица 4

$\epsilon = 10 \epsilon_0$			
$2R/c$	k_1^N	$2R/c$	k_1^N
0	2,22144		
0,1	2,21583	0,6	1,49197
0,2	2,17824	0,7	1,31442
0,3	2,08010	0,8	1,16862
0,4	1,91064	0,9	1,05087
0,5	1,69906	1	0,95500

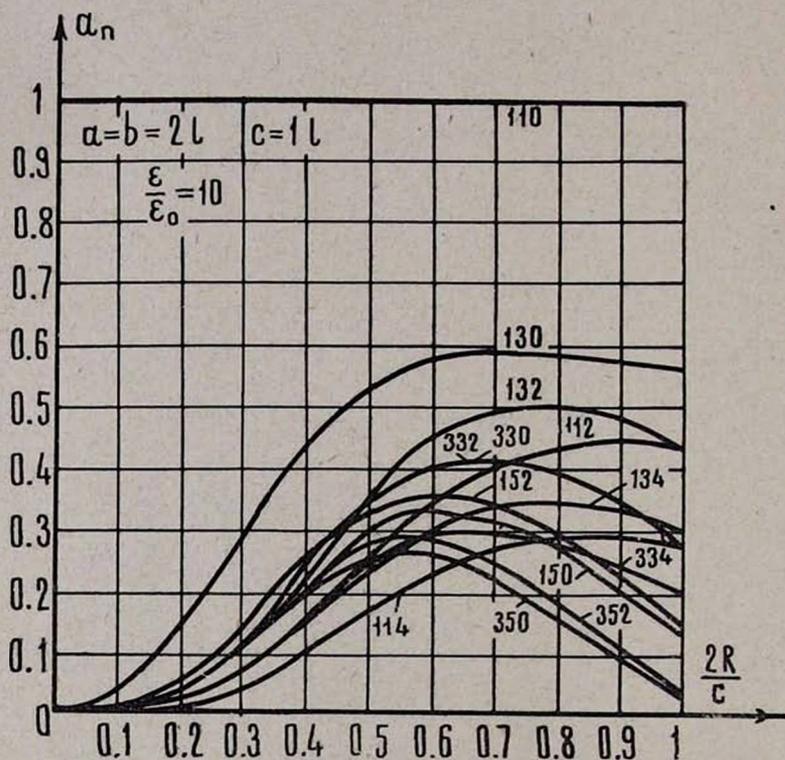


Рис. 7.

вания, что, в свою очередь, дало бы возможность перейти к области малых образцов с весьма высокой диэлектрической проницаемостью.

За постановку задачи и руководство работой выражаю благодарность профессору В. В. Никольскому.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Никольский. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики, Наука, М., 1967.
2. Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики, Физматгиз, М., 1960.

ՊՐՈՅԵԿՏԻՈՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿ ԳՆԴՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՑՈՒՆԱԶԵՎ
ՌԵԶՈՆԱՏՈՐԻ ՀԱՄԱՐ

Վ. Ա. ՍԱՖԱՐԻԱՆ

Պրոեկցիոն մեթոդով լուծված է խնդիր դիէլեկտրիկ գնդով ուղղանկյունաձև ռեզոնատորի վերաբերյալ: Կազմված է ծրագիր «Հրազդան-3» էՀՄ-ի համար: Քննարկվում են հաշվումների արդյունքները:

PROJECTION ALGORITHM FOR RECTANGULAR
RESONATOR WITH A DIELECTRIC SPHERE

V. A. SAFARIAN

A problem of a rectangular resonator with a dielectric sphere has been solved by the projection method. The problem is programmed for "Razdan-3" computer and results of computations are discussed.