

К МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНО ВРАЩАЮЩИХСЯ САМОГРАВИТИРУЮЩИХ ЖИДКИХ ФИГУР

Р. С. ОГАНЕСЯН, М. Г. АБРАМЯН

Рассмотрен вопрос относительного равновесия квазистационарно вращающихся фигур самогравитирующих идеально-проводящих жидких масс при наличии тороидального магнитного поля. Показано, что при наступлении квазистационарного вращения возникает полоидальное магнитное поле, обеспечивающее относительное равновесие в виде сфероидальных серий фигур. В частности, не исключается возможность периодического изменения формы сфероида вокруг равновесной сферической фигуры.

Условия относительного равновесия нестационарно вращающейся самогравитирующей и намагниченной плазмы в рамках физики сплошных сред определяются следующей системой уравнений [1]:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla V + \left[\vec{\omega} \left[\vec{r} \vec{\omega} \right] \right] + \left[\vec{\omega} \vec{r} \right] - \frac{1}{4\pi\rho} \left[\vec{B} \text{rot} \vec{B} \right], \quad (1)$$

$$\Delta V = -4\pi G\rho, \quad (2)$$

$$p = p(\rho). \quad (3)$$

Предполагая, что космическая плазма обладает твердотельным вращением типа $(0, 0, \omega(t))$, т. е.

$$\left[\vec{\omega} \left[\vec{r} \vec{\omega} \right] \right] = \frac{\omega^2(t)}{2} \nabla (x^2 + y^2), \quad (4)$$

из уравнения (1) с учетом (3) получаем

$$8\pi\vec{\omega} = \text{rot} \frac{[\vec{B} \text{rot} \vec{B}]}{\rho}. \quad (5)$$

В работе [1] нами был рассмотрен случай равномерного вращения, где мы пользовались тороидальным решением уравнения (5) (при $\dot{\omega} = 0$)

$$\vec{B}_e(r, \vartheta) = \hat{e}_\varphi \gamma \rho r \sin \vartheta \quad (\gamma = \text{const}). \quad (6)$$

При этом оказалось, что эллипсоиды Маклорена ($\rho = \text{const}$, $a = b > c$) при значении индукции магнитного поля, большем некоторого критического ($B_0 > B_c = \omega a \sqrt{2\pi\rho}$, где $B_0 = \gamma \rho a$ — индукция магнитного поля на экваторе), вытягиваются вдоль оси вращения ($a = b < c$), образуя новый тип равновесных сфероидальных фигур. При этом критическому значению магнитного поля ($B_0 = B_c$) соответствует стационарно вращающаяся фигура в форме сферы.

Нестационарность вращения будем рассматривать как малое возмущение стационарно вращающейся фигуры и решение уравнения (5) представим в виде

$$\vec{B}(r, \vartheta, \varphi, t) = \vec{B}_e(r, \vartheta) + \vec{b}(r, \vartheta, \varphi, t), \quad (7)$$

где $\vec{b}$ — возмущение магнитного поля, вызванное неравномерностью вращения,

$$|\vec{b}| \ll |\vec{B}_e|. \quad (8)$$

Подставляя (7) в (5) и учитывая (6), в линейном приближении получим уравнение для определения $\vec{b}$:

$$\frac{8\pi}{\gamma} \dot{\omega} = \text{rot} [\vec{b} \text{rot} (\hat{e}_\varphi r \sin \vartheta)] + [(\hat{e}_\varphi r \sin \vartheta) \text{rot} \vec{b}]. \quad (9)$$

Здесь мы исключили плотность ρ , приняв, что $\rho \neq 0$ в объеме, занимаемом гравитирующей массой. Так что получаемые результаты будут иметь смысл только в пределах рассматриваемой массы.

Заметим, что чисто тороидальные магнитные поля не являются решениями уравнения (9). Имея в виду, что

$$\dot{\omega}_r = \dot{\omega} \cos \vartheta, \quad \dot{\omega}_\vartheta = -\dot{\omega} \sin \vartheta, \quad \dot{\omega}_\varphi = 0, \quad (10)$$

будем искать решение уравнения (9) в виде полоидальных магнитных полей

$$\vec{b} = \vec{b}(b_r, b_\vartheta, 0). \quad (11)$$

При этом уравнение (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{4\pi \dot{\omega}}{\gamma} \cos \vartheta = -\frac{1}{r} \left\{ \sin \vartheta \frac{\partial b_r}{\partial \vartheta} + \cos \vartheta \frac{\partial b_\vartheta}{\partial \vartheta} + 2 \cos \vartheta b_r + \frac{\cos 2\vartheta}{\sin \vartheta} b_\vartheta - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 b_\vartheta}{\partial \varphi^2} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$-\frac{4\pi \dot{\omega}}{\gamma} \sin \vartheta = \sin \vartheta \frac{\partial b_r}{\partial r} + \cos \vartheta \frac{\partial b_\vartheta}{\partial r} + \frac{\sin \vartheta}{r} b_r + \frac{\cos \vartheta}{r} b_\vartheta - \frac{1}{2r \cos \vartheta} \frac{\partial^2 b_r}{\partial \varphi^2}, \quad (13)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{rot}_\varphi \vec{b}. \quad (14)$$

Наконец, имеем еще условие

$$\text{div} \vec{b} = 0. \quad (15)$$

Из уравнения (14) следует, что компоненты b_r и b_ϑ не зависят от координаты φ (это объясняется выбором фигуры равновесия в виде сфероида). При этом уравнения (12) и (13) с учетом (14) и (15) легко разрешаются относительно функций $b_r \cos \vartheta - b_\vartheta \sin \vartheta$ и $b_r \sin \vartheta + b_\vartheta \cos \vartheta$ и с учетом конечности решений в центре системы получаем

$$b_r \sin \vartheta + b_\theta \cos \vartheta = -\frac{2\pi \dot{\omega}}{\gamma} r \sin \vartheta,$$

$$b_r \cos \vartheta - b_\theta \sin \vartheta = \frac{4\pi \dot{\omega}}{\gamma} r \cos \vartheta + F(r \sin \vartheta),$$

где $F(r \sin \vartheta)$ — произвольная функция своего аргумента, порядка $\dot{\omega}$. Таким образом, полоидальные магнитные поля, являющиеся решениями уравнения (9), при $\dot{\omega}$, задаваемой (10), имеют следующий вид:

$$b_r(r, \vartheta) = \frac{2\pi \dot{\omega}}{\gamma} r (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \cos \vartheta F(r \sin \vartheta). \quad (16)$$

$$b_\theta(r, \vartheta) = -\frac{6\pi \dot{\omega}}{\gamma} r \sin \vartheta \cos \vartheta - \sin \vartheta F(r \sin \vartheta),$$

$$b_\varphi = 0.$$

С учетом (4), (7) и (8) уравнение (1) в линейном приближении примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla V + \frac{\omega^2(t)}{2} \nabla (x^2 + y^2) - \frac{1}{4\pi\rho} [\vec{B}_e \text{ rot } \vec{B}_e] + \\ + [\vec{\omega} \vec{r}]_\varphi - \frac{1}{4\pi\rho} [\vec{b} \text{ rot } \vec{B}_e] - \frac{1}{4\pi\rho} [\vec{B}_e \text{ rot } \vec{b}]. \end{aligned} \quad (17)$$

Прямым вычислением легко убедиться, что с учетом (6), (10) и (16) комбинация последних трех членов в уравнении (17) обращается в нуль. Следовательно, уравнение относительного равновесия (17) с учетом соотношения [1]

$$\frac{1}{4\pi\rho} [\vec{B}_e \text{ rot } \vec{B}_e] = \rho \frac{\gamma^2}{4\pi} \nabla (x^2 + y^2)$$

примет вид

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \left\{ V + \left(\frac{\omega^2(t)}{2} - \rho \frac{\gamma^2}{4\pi} \right) (x^2 + y^2) \right\}. \quad (18)$$

Представляя уравнение поверхности жидкой массы в виде сфероида, полуоси которого зависят от времени,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(t)} + \frac{z^2}{c^2(t)} = 1, \quad (19)$$

после аналогичных работе [1] рассуждений приходим к тому же соотношению между физическими параметрами системы (угловая скорость и магнитное поле) с формой сфероидальной фигуры ($u(t) = c^2(t)/a^2(t)$) с тем только отличием, что параметр Ω уже зависит от времени:

$$\Omega(t) = \frac{\omega^2(t)}{2\pi G\rho} - \frac{\gamma^2}{4\pi^2 G} = \int_0^\infty \frac{u(t)[1-u(t)]x dx}{(1+x)^{3/2}[1+xu(t)]^2}.$$

Представим зависимость угловой скорости от времени в виде

$$\omega(t) = \omega_c + \omega_m \sin \sigma t,$$

где $\omega_c = \gamma \sqrt{\rho/2\pi}$ — угловая скорость, соответствующая сферической фигуре равновесия ($\omega_c > \omega_m$). Из условия квазистационарности вращения следует, что $\sigma/\omega_m \ll 1$. Очевидно, что в момент времени $t = 0$ фигура равновесия имеет форму сферы ($u(0) = 1$, $\Omega(0) = 0$). В момент времени $t_0 = \frac{\pi}{2\sigma}$ имеем фигуру равновесия в виде максимально сплюсненного сфероида ($u(t_0) < 1$, $\Omega(t_0) > 0$). Наконец, в момент $t_1 = \frac{3\pi}{2\sigma}$ получаем предельно вытянутый сфероид ($u(t_1) > 1$, $\Omega(t_1) < 0$).

Иными словами, изменение формы сфероида происходит периодически, колеблясь вокруг равновесной сферической фигуры.

Ереванский государственный
университет

Поступила 4.V.1973

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян. Астроном. ж., (в печати).

ՔՎԱԶԻՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՊՏՏՎՈՂ ԻՆՔՆԱԳՐԱՎԻՏԱՑՎՈՂ ՀԵՂՈՒԿ ՁԵՎԵՐԻ ՀԱՐԱՐԵՐԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՈՒԹՅԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱՀԻԴՐՈԳԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ռ. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Մ. Գ. ԱՐՐԱՀԱՄՅԱՆ

Քննարկված է քվազիստացիոնար պտտվող ինքնագրավիտացվող իդեալական-հաղորդիչ հեղուկ ղանգվածների հարաբերական հավասարակշռված ձևերի որոշման հարցը, թորոդալ մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում: Ցույց է տրված, որ քվազիստացիոնար պտույտը առաջ է բերում թորոդալ մագնիսական դաշտ, որն ապահովում է հարաբերական հավասարակշռությունը սֆերոդալ ձևերի տեսքով:

ON THE MAGNETOHYDRODYNAMICAL THEORY OF RELATIVE EQUILIBRIUM OF QUASISTATIONARY ROTATING SELFGRAVITATING LIQUID FIGURES

R. S. OGANESSIAN, M. G. ABRAHAMIAN

The problem of the relative equilibrium of quasistationary rotating figures of selfgravitating ideally-conducting liquid in the presence of the toroidal magnetic field are considered. It is shown that the existence of the quasistationary rotation involves a poloidal magnetic field, which provides the relative equilibrium of the system as a series of spheroidal figures.