

К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СРЕД СО СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

О. С. ЕРИЦЯН

Рассмотрено распространение электромагнитных волн в неоднородной среде со спиральной структурой, примером которой может служить холестерический жидкий кристалл [1]. С помощью полученных материальных уравнений установлены и исследованы амплитудные и фазовые соотношения для свободных дифрагированных волн. Рассмотрена также задача по определению амплитуд при наличии границ раздела.

В последнее время большое внимание привлекают жидкие кристаллы благодаря своеобразным физическим свойствам и разнообразным их применениям [1]. В отличие от нематических и смектических жидких кристаллов, которые, как и обычные кристаллы, могут быть описаны диагональным тензором, холестерические жидкие кристаллы имеют более сложную структуру, а изучение их свойств, в частности, распространение электромагнитных волн в них представляет самостоятельный интерес. Холестерические жидкие кристаллы состоят из анизотропных молекулярных слоев, повернутых друг относительно друга вокруг направления, перпендикулярного слоям [1], и могут быть описаны с помощью общей схемы сред со спиральной структурой.

1. *Общие соотношения.* Направим ось z' перпендикулярно анизотропным слоям (для холестерических жидких кристаллов ими являются молекулярные слои). При этом для тензора диэлектрической проницаемости будем иметь

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'x'} &= \sum_m a_m \exp\left(i \frac{2\pi}{\delta} m z'\right), \\ \varepsilon_{y'y'} &= \sum_m b_m \exp\left(i \frac{2\pi}{\delta} m z'\right), \\ \varepsilon_{z'z'} &= \sum_m \eta_m \exp\left(i \frac{2\pi}{\delta} m z'\right).\end{aligned}\quad (1)$$

Главные направления тензора диэлектрической проницаемости совпадают с осями x' , y' , z' . С изменением координаты z' главные направления тензора диэлектрической проницаемости, и вместе с ними направления осей x' и y' , равномерно поворачиваются вокруг оси z' .

Выберем систему координат (x, y, z) с фиксированным направлением осей. Совмещая ось z с осью z' , будем иметь, что на расстоянии z от начала координат оси x' , y' повернуты относительно осей x , y на угол

$$\alpha(z) = \frac{2\pi}{\sigma} z, \quad (1a)$$

где σ — то расстояние вдоль оси z , на котором система осей x' , y' делает полный оборот вокруг оси z . Таким образом, в системе x, y, z среда имеет

спиральную структуру. Заметим, что периодом структуры должна считаться не величина τ , а $d = \frac{\sigma}{2}$, так как ориентация осей диэлектрической проницаемости повторяется в результате поворота на 180° .

С помощью (1), (1а) и формул преобразования компонент тензора при переходе из одной системы координат в другую [2] получаем следующие материальные уравнения (в системе x, y, z):

$$\begin{aligned} D_x &= \left[\sum_m c_m \exp \left(i \frac{2\pi}{\delta} m z \right) + \sum_m f_m (\exp i \zeta_m^+ z + \exp i \zeta_m^- z) \right] E_x - \\ &\quad - i \left[\sum_m f_m (\exp i \zeta_m^+ z - \exp i \zeta_m^- z) \right] E_y, \\ D_y &= \left[\sum_m c_m \exp \left(i \frac{2\pi}{\delta} m z \right) - \sum_m f_m (\exp i \zeta_m^+ z + \exp i \zeta_m^- z) \right] E_y - \\ &\quad - i \left[\sum_m f_m (\exp i \zeta_m^+ z - \exp i \zeta_m^- z) \right] E_x, \\ D_z &= \left[\sum_m \eta_m \exp i \left(\frac{2\pi}{\delta} m z \right) \right] E_z, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$c_m = \frac{a_m + b_m}{2}, \quad f_m = \frac{a_m - b_m}{4}, \quad \zeta_m^\pm = \frac{2\pi}{\delta} m \pm \frac{4\pi}{\sigma}. \quad (3)$$

Подставляя (2) в волновое уравнение

$$\text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{D} \quad (4)$$

и разлагая поле в ряд Фурье

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{m, n} \vec{E}_{mn} \exp i(\vec{k}_{mn} \vec{r} - \omega t),$$

получим следующее выражение для волновых векторов

$$\vec{k}_{mn} = \vec{k}_{00} + \left(\frac{2\pi}{\delta} m + \frac{4\pi}{\sigma} n \right) \vec{z}_0, \quad (5)$$

где $\vec{z}_0$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z , $\vec{k}_{00}$ — некоторый фиксированный вектор [3], m и n пробегает значения от $-\infty$ до ∞ .

Волновое уравнение для Фурье-компоненты с волновым вектором $\vec{k}_{mn}$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} k_x (\vec{k}_{mn} \vec{E}_{mn}) - \left(k_{mn}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} c_0 \right) (\vec{E}_{mn})_x &= -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{k \neq 0} c_k (\vec{E}_{m-k, n})_x - \\ &- \frac{\omega^2}{c^2} \sum_k f_k [(\vec{E}_{m-k, n-1} + \vec{E}_{m-k, n+1})_x - i(\vec{E}_{m-k, n-1} - \vec{E}_{m-k, n+1})_y], \\ k_y (\vec{k}_{mn} \vec{E}_{mn}) - \left(k_{mn}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} c_0 \right) (\vec{E}_{mn})_y &= -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{k \neq 0} c_k (\vec{E}_{m-k, n})_y + \end{aligned} \quad (6)$$

$$+ \frac{\omega^2}{c^2} \sum_k f_k [(\vec{E}_{m-k, n-1} + \vec{E}_{m-k, n+1})_y + i(\vec{E}_{m-k, n-1} - \vec{E}_{m-k, n+1})_x],$$

$$k_{zmn} (\vec{k}_{mn} \vec{E}_{mn}) - \left(k_{mn}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \gamma_{l_0} \right) (\vec{E}_{mn})_z = - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{k \neq 0} \gamma_{lk} (\vec{E}_{m-k, n})_z,$$

где

$$k_x = (\vec{k}_{00})_x = (\vec{k}_{mn})_x,$$

$$k_y = (\vec{k}_{00})_y = (\vec{k}_{mn})_y,$$

$$k_{zmn} = (\vec{k}_{mn})_z = k_{z00} + \frac{2\pi}{\delta} m + \frac{4\pi}{\sigma} n.$$

2. *Определение амплитуд Фурье-компонент.* При применимости теории возмущений система уравнений (6) допускает простое решение. Пусть диэлектрическая проницаемость (1) удовлетворяет соотношениям

$$\varepsilon_{lk}(z) = \varepsilon_{lk}^{(0)} + \varepsilon'_{lk}(z), \quad \varepsilon'_{lk}(z) \ll \varepsilon_{lk}^{(0)}. \quad (7)$$

Кроме последнего условия, обычно достаточного для применимости теории возмущений, в рассматриваемом случае необходимо также выполнение следующих условий:

$$f_0 \ll c_0, \quad f_m \ll f_0, \quad (8)$$

связанных с наличием спиральности. Отметим, что для γ_{lm} условий типа (8) не возникает, так как ось спиральности среды параллельна оси z .

Представим поле в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{00} \exp i(\vec{k}_{00} \vec{r} - \omega t) + \vec{E}'(\vec{r}, t), \quad (9)$$

$$E'(\vec{r}, t) \ll E_{00}. \quad (10)$$

Пренебрегая в выражении индукции (2) членами $f_m \vec{E}_{00}$, $c_m \vec{E}'$ при $m \neq 0$ и $f_m \vec{E}'$ и представив $\vec{E}'(\vec{r}, t)$ в виде суммы Фурье-компонент с волновыми векторами (5)

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \sum_{m, n} \vec{E}_{mn} \exp i(\vec{k}_{mn} \vec{r} - \omega t),$$

вместо точной системы уравнений (6) в принятом приближении (теория возмущений) получим следующую систему уравнений:

$$k_x u_{mn} - \left(k_{mn}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} c_0 \right) E_{xmn} = - \frac{\omega^2}{c^2} \{ c_m (1 - \delta_{0m}) E_{x0n} \delta_{0n} +$$

$$+ f_0 [(E_{xm, n-1} - iE_{ym, n-1}) \delta_{0, n-1} + (E_{xm, n+1} + iE_{ym, n+1}) \delta_{0, n+1}] \delta_{0m} \},$$

$$k_y u_{mn} - \left(k_{mn}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} c_0 \right) E_{ymn} = - \frac{\omega^2}{c^2} \{ c_m (1 - \delta_{0m}) E_{y0n} \delta_{0n} -$$

$$- f_0 [(E_{ym, n-1} + iE_{xm, n-1}) \delta_{0, n-1} + (E_{ym, n+1} - iE_{xm, n+1}) \delta_{0, n+1}] \delta_{0m} \},$$

$$k_{zmn} u_{mn} - \left(k_{mn}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \gamma_{l_0} \right) E_{zmn} = - \frac{\omega^2}{c^2} \gamma_{lm} (1 - \delta_{0m}) E_{z0n} \delta_{0n},$$

где δ_{lk} — символ Кронекера, $u_{mn} = (\vec{k}_{mn} \vec{E}_{mn})$.

При $m=n=0$ получаем систему однородных уравнений, из условия существования ненулевого решения которой определяется $\vec{k}_{00}$. Для z -компоненты волнового вектора $\vec{k}_{00}$ получаются два выражения

$$k_{z00}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} c_0 - (k_x^2 + k_y^2) \quad (12)$$

и

$$k_{z00}^2 = \frac{c_0}{\eta_0} \left[\frac{\omega^2}{c^2} \eta_0 - (k_x^2 + k_y^2) \right], \quad (13)$$

т. е. для волнового вектора имеем следующие значения:

$$k_{00}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} c_0,$$

$$k_{00}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} c_0 + (k_x^2 + k_y^2) \left(1 - \frac{c_0}{\eta_0} \right).$$

Выражение (12) дает z -компоненту волнового вектора обыкновенной волны $\vec{E}_{00}^{(об)}$, а выражение (13) — необыкновенной волны $\vec{E}_{00}^{(необ)}$.

При $n=0$ система (11) определяет амплитуды $\vec{E}_{m0}$ через $\vec{E}_{00}$. Волны с амплитудами $\vec{E}_{m0}$ обязаны своим возникновением наличию неоднородности, не связанной со спиральностью, а волны с отличными от нуля амплитудами $\vec{E}_{0, \pm 1}$ — наличию спиральности. Для компонент амплитуд $\vec{E}_{0, \pm 1}$ получаем следующие выражения:

$$E_{x0, \pm 1} = \frac{A_{\pm}}{\Delta_0}, \quad E_{y0, \pm 1} = \frac{B_{\pm}}{\Delta_0}, \quad E_{z0, \pm 1} = \frac{C_{\pm}}{\Delta_0}, \quad (14)$$

$$A_{\pm} = -\frac{\omega^2}{c^2} f_0 (E_{x00} \mp i E_{y00}) \left\{ \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} c_0 - k_{0, \pm 1}^2 + k_y^2 \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} \eta_0 - k_{0, \pm 1}^2 + k_{z0, \pm 1}^2 \right) - k_y^2 k_{z0, \pm 1}^2 \right] \pm i k_x k_y \left(\frac{\omega^2}{c^2} \eta_0 - k_{0, \pm 1}^2 \right) \right\},$$

$$B_{\pm} = -\frac{\omega^2}{c^2} f_0 (E_{x00} \mp i E_{y00}) \left\{ -\left(\frac{\omega^2}{c^2} \eta_0 - k_{0, \pm 1}^2 \right) k_x k_y \mp i \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} c_0 - k_{0, \pm 1}^2 + k_x^2 \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} \eta_0 - k_{0, \pm 1}^2 + k_{z0, \pm 1}^2 \right) - k_x^2 k_{z0, \pm 1}^2 \right] \right\},$$

$$C_{\pm} = \frac{\omega^2}{c^2} f_0 (E_{x00} \mp i E_{y00}) \left(\frac{\omega^2}{c^2} c_0 - k_{0, \pm 1}^2 \right) (k_x + i k_y) k_{z0, \pm 1}, \quad (15)$$

$$\Delta_0 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} c_0 - k_{0, \pm 1}^2 + k_x^2 \right) \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} c_0 - k_{0, \pm 1}^2 \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} \eta_0 - k_x^2 - k_y^2 \right) + k_y^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} \eta_0 - k_{0, \pm 1}^2 \right) \right] - k_x^2 k_y^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} \eta_0 - k_{0, \pm 1}^2 \right) - k_x^2 k_{z0, \pm 1}^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} c_0 - k_{0, \pm 1}^2 \right).$$

Решение $\vec{E}_{00}$ волнового уравнения в нулевом приближении соответствует волне в среде со средней диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{iq}^{(0)}$, а амплитуды всех остальных волн считаются малыми. Рассматривая для простоты случай $k_x = k_y = 0$ (угол ϑ между $\vec{k}_{00}$ и слоями равен 90°), из (14) — (15) получаем

$$E_{x0, \pm 1} = \mp \frac{\frac{\omega^2}{c^2} f_0 (E_{x00} \mp iE_{y00})}{\frac{8\pi}{\sigma} \left(k_0 \mp \frac{2\pi}{\sigma} \right)}, \quad E_{y0, \pm 1} = \frac{i \frac{\omega^2}{c^2} f_0 (E_{x00} \mp iE_{y00})}{\frac{8\pi}{\sigma} \left(k_0 \mp \frac{2\pi}{\sigma} \right)}. \quad (16)$$

Условие применимости теории возмущений есть

$$\left| \frac{\frac{\omega^2}{c^2} f_0}{\frac{8\pi}{\sigma} \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{c_0^2 \mp \frac{2\pi}{\sigma}} \right)} \right| \ll 1. \quad (16a)$$

Оно нарушается вблизи частоты, удовлетворяющей соотношению

$$\frac{\omega}{c} \sqrt{c_0^2} = \frac{2\pi}{\sigma}, \quad (166)$$

которое выражает равенство периода $d = \frac{\sigma}{2}$ полудлине волны с амплитудой $\vec{E}_{00}$ (условие Брэгга $d \sin \vartheta = m \frac{\lambda}{2}$ при $\vartheta = 90^\circ$, $m = 1$).

В этом случае за решение в нулевом приближении нельзя брать $\vec{E}_{00}$, так как условие малости других волн (а именно, волны $\vec{E}_{0, -1}$) нарушается, и мы должны пользоваться видоизмененной теорией возмущений [3], учитывающей в нулевом приближении обе волны ($\vec{E}_{00}$ и $\vec{E}_{0, -1}$). Добавляя к уравнениям (11) при $m = n = 0$ еще три уравнения, которые получаются из (11) заменой $\delta_{0, n}$ на $\delta_{1, n}$ и $\delta_{0, n \pm 1}$ на $\delta_{-1, n \pm 1}$, и сохраняя наряду с членами $f_0 \vec{E}_{00}$ также члены $f_0 \vec{E}_{0, -1}$, получаем систему шести однородных уравнений относительно компонент амплитуд $\vec{E}_{00}$ и $\vec{E}_{0, -1}$; волновой вектор определяется из условия равенства нулю определителя этой системы.

Рассматривая для простоты случай, когда $k_x = k_y = 0$ (в этом случае вместо детерминанта шестого порядка получаем детерминант четвертого порядка), для частот брэгговского отражения (ω_1 , ω_2 , ω_3) получаем:

$$a) \quad \frac{\omega_1^2}{c^2} c_0 = \left(\frac{2\pi}{\sigma} \right)^2, \quad (17)$$

а между компонентами амплитуд полей $\vec{E}_{00}$ и $\vec{E}_{0, -1}$ имеют место соотношения

$$E_{x00} = -iE_{y00}, \quad E_{x0, -1} = iE_{y0, -1}; \quad (17a)$$

$$б) \quad \frac{\omega_2^2}{c^2} (c_0 + 2f_0) = \left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^2, \quad (18)$$

$$E_{y00} = -E_{y0, -1}, \quad E_{x0, -1} = -iE_{y0, -1}, \quad E_{x00} = -iE_{y0, -1}; \quad (18a)$$

$$в) \quad \frac{\omega_3^2}{c^2} (c_0 - 2f_0) = \left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^2, \quad (19)$$

$$E_{y00} = +E_{y0, -1}, \quad E_{x0, -1} = -iE_{y0, -1}, \quad E_{x00} = iE_{y0, -1}. \quad (19a)$$

3. *Граничная задача.* Рассмотрим пластинку, которая занимает область $0 \leq z \leq b$ и описывается материальными уравнениями (2). Пусть на границу $z=0$ из области $z < 0$ (области $z < 0$ и $z > b$ представляют собой вакуум) падает плоская волна

$$\vec{E}_{\text{пад}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp i(\vec{k} \vec{r} - \omega t), \quad (20)$$

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad k_y = 0. \quad (21)$$

Преломленное поле будет иметь вид [4]

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{прел}}(\vec{r}, t) = & \vec{E}_0 \exp i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega t) + \\ & + \sum'_{(m, n \neq 0, 0)} \vec{E}_{mn}(\vec{r}, t) + E_{\text{прел}}^{(1)}(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\vec{E}_0$ определяется обычными формулами Френеля [5], $\vec{E}_{mn}$ выражаются через $\vec{E}_0$ с помощью уравнений (11), а $\vec{E}_{\text{прел}}^{(1)}$ является общим решением следующего уравнения без правой части, получаемого подстановкой (9) в волновое уравнение (4),

$$\text{grad div } \vec{E}' - \left(\nabla^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0\right) \vec{E}' = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \vec{E}_0(\vec{r}, t). \quad (23)$$

Это решение имеет следующий вид

$$\vec{E}_{\text{прел}}^{(1)}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0^{(1)} \exp i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega t). \quad (24)$$

Обозначим тильдой амплитуды волн, распространяющихся внутри пластинки от границы $z=b$ к границе $z=0$,

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{прел}}(\vec{r}, t) = & \vec{E}_0 \exp i(k_x x - k_{z0} z - \omega t) + \\ & + \sum'_{m, n} \vec{E}_{mn}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{\text{прел}}^{(1)}(\vec{r}, t), \quad (m, n \neq 0, 0). \end{aligned} \quad (25)$$

Поля отраженной и прошедшей волн могут быть записаны в аналогичном виде

$$\vec{E}_{\text{отр}} = \vec{E}_{\text{отр}}^{(0)} + \vec{E}_{\text{отр}}^{(1)}, \quad \vec{E}_{\text{прох}} = \vec{E}_{\text{прох}}^{(0)} + \vec{E}_{\text{прох}}^{(1)}. \quad (26)$$

Амплитуды $\vec{E}_{00}$, $\vec{E}_{00}^{(0)}$ и $\vec{E}_{отр}^{(0)}$ определяются из граничных условий, как для однородной пластинки; заданным полем является $\vec{E}_{пад}$. Поля $\vec{E}_{тл}$ и $\vec{E}_{тл}$ выражаются через найденные амплитуды $\vec{E}_{00}$ и $\vec{E}_{00}^{(1)}$ (с помощью (11)). Амплитуды $\vec{E}_0^{(1)}$, $\vec{E}_0^{(1)}$, $\vec{E}_{прох}^{(1)}$ и $\vec{E}_{отр}^{(1)}$ определяются из условий сшивки на границах; заданными полями являются $\vec{E}_{тл}$ и $\vec{E}_{тл}$.

Для каждого из решений (а), (б) и (в), рассмотренных в конце предыдущего пункта, к граничным условиям добавляются соответственно соотношения (17а), (18а) и (19а); тем самым число независимых компонент снижается до числа граничных условий.

4. Пример расчета в случае одной границы. Пусть на границу $z=0$, разделяющую вакуум от среды, описываемой материальными уравнениями (2), в нормальном направлении падает волна

$$\vec{E}_{пад} = E_y \vec{y}_0 \exp i \left(\frac{\omega}{c} z - \omega t \right), \quad E_{x\text{ пад}} = 0. \quad (27)$$

Для полей $\vec{E}_{00}$ и $\vec{E}_{отр}^{(0)}$ имеем обычные формулы Френеля

$$E_{x00} = 0, \quad E_{xотр}^{(0)} = 0, \\ E_{y00} = \frac{2E_y}{1 + \sqrt{c_0}}, \quad E_{yотр}^{(0)} = \frac{1 - \sqrt{c_0}}{1 + \sqrt{c_0}} E_y. \quad (28)$$

Для компонент полей $\vec{E}_{0, \pm 1}$ получаем следующие выражения:

$$E_{x0, \pm 1} = \frac{\pm i \frac{\omega^2}{c^2} f_0 2E_y}{(k_{00}^2 - k_{0, \pm 1}^2)(1 + \sqrt{c_0})}, \quad E_{y0, \pm 1} = \frac{\frac{\omega^2}{c^2} f_0 2E_y}{(k_{00}^2 - k_{0, \pm 1}^2)(1 + \sqrt{c_0})}. \quad (29)$$

Компоненты полей $E_{x0}^{(1)}$ и $E_{xотр}^{(1)}$ равны

$$E_{x0}^{(1)} = - \left[\left(1 + \frac{c}{\omega} k_{0, +1} \right) E_{x0, +1} + \left(1 + \frac{c}{\omega} k_{0, -1} \right) E_{x0, -1} \right] (1 + \sqrt{c_0})^{-1}, \\ E_{xотр}^{(1)} = \left[\left(\sqrt{c_0} - \frac{c}{\omega} k_{0, +1} \right) E_{x0, +1} + \left(\sqrt{c_0} - \frac{c}{\omega} k_{0, -1} \right) E_{x0, -1} \right] \times \\ \times (1 + \sqrt{c_0})^{-1}, \quad (30)$$

а компоненты $E_{y0}^{(1)}$ и $E_{yотр}^{(1)}$ получаются из (30) заменой всех индексов "x" на "y".

Рассмотрим для простоты случай, когда $c_m = 0$ (при $m \neq 0$). Тогда отличие картины поля от случая однородной среды будет определяться наличием только спиральности. В этом случае получаем

$$E_{x \text{ прел}}(\vec{r}, t) = - \frac{2i \frac{\omega^2}{c^2} f_0 E_y}{(1 + \sqrt{c_0})^2} \left[\frac{1 + \frac{c}{\omega} k_{0,+1}}{k_{00}^2 - k_{0,+1}^2} - \frac{1 + \frac{c}{\omega} k_{0,-1}}{k_{00}^2 - k_{0,-1}^2} \right] \exp i \left(\frac{\omega}{c} z - \omega t \right) +$$

$$+ \frac{2i \frac{\omega^2}{c^2} f_0 E_y}{1 + \sqrt{c_0}} \left[\frac{\exp i(k_{0,+1} z - \omega t)}{k_{00}^2 - k_{0,+1}^2} - \frac{\exp i(k_{0,-1} z - \omega t)}{k_{00}^2 - k_{0,-1}^2} \right], \quad (31)$$

$$E_{y \text{ прел}}(\vec{r}, t) = \frac{2 E_y}{1 + \sqrt{c_0}} - \frac{2 E_y \frac{\omega^2}{c^2} f_0}{(1 + \sqrt{c_0})^2} \left[\frac{1 + \frac{c}{\omega} k_{0,+1}}{k_{00}^2 - k_{0,+1}^2} + \frac{1 + \frac{c}{\omega} k_{0,-1}}{k_{00}^2 - k_{0,-1}^2} \right] e^{i\varphi} +$$

$$+ \frac{2 E_y}{1 + \sqrt{c_0}} \frac{\omega^2}{c^2} f_0 \left[\frac{\exp i(k_{0,+1} z - \omega t)}{k_{00}^2 - k_{0,+1}^2} + \frac{\exp i(k_{0,-1} z - \omega t)}{k_{00}^2 - k_{0,-1}^2} \right], \quad (32)$$

$$\varphi = k_{00} z - \omega t.$$

В преломленной волне кроме y -компоненты поля существует также x -компонента, отсутствующая в падающей волне. Компоненты амплитуды отраженной волны равны

$$E_{x \text{ отр}} = \frac{2i \frac{\omega^2}{c^2} f_0 E_y}{(1 + \sqrt{c_0})^2} \left[\frac{\sqrt{c_0} - \frac{c}{\omega} k_{0,+1}}{k_{00}^2 - k_{0,+1}^2} - \frac{\sqrt{c_0} - \frac{c}{\omega} k_{0,-1}}{k_{00}^2 - k_{0,-1}^2} \right] \exp i \left(-\frac{\omega}{c} z - \omega t \right), \quad (33)$$

$$E_{y \text{ отр}} = \frac{1 - \sqrt{c_0}}{1 + \sqrt{c_0}} E_y +$$

$$+ \frac{2 \frac{\omega^2}{c^2} f_0 E_y}{(1 + \sqrt{c_0})^2} \left[\frac{\sqrt{c_0} - \frac{c}{\omega} k_{0,+1}}{k_{00}^2 - k_{0,+1}^2} + \frac{\sqrt{c_0} - \frac{c}{\omega} k_{0,-1}}{k_{00}^2 - k_{0,-1}^2} \right] \exp i \left(-\frac{\omega}{c} z - \omega t \right), \quad (34)$$

т. е. отраженная волна, в которой появляется также новая компонента, имеет эллиптическую поляризацию.

Величина f_0 может во много раз превышать численное значение параметра гирации γ естественно-активных сред или величину g вектора гирации магнитоактивных диэлектриков. Обычно параметры γ и g не превышают 10^{-5} , а f_0 имеет порядок 10^{-2} [6]. Из (32)–(34) следует, что и новая компонента, пропорциональная f_0 , в случае рассматриваемых здесь сред во много раз превышает такую же компоненту, возникающую на границе магнитоактивных или естественно гиротропных сред, пропорциональную соответственно параметрам g и γ .

5. Холестерический жидкий кристалл в оптической области частот.

В оптической области для таких сред величина σ и длина волны λ — одного порядка [1]. Поэтому в оптической области частот может возникать ситуация, указанная в конце пункта 2. С другой стороны, так как $\delta \ll \lambda$, в (1) можно пренебречь зависимостью ε_{ik} от z' , заменяя их постоянными a_0 , b_0 и η_0 (это означает, что в материальных уравнениях (2) пренебрегается членами с коэффициентами c_m и f_m при $m \neq 0$; при этом, как можно убедиться непосредственно, спиральность остается).

При $k_x = k_y = 0$ получаем следующие рекуррентные соотношения между амплитудами:

$$\left(k_{0n}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} c_0\right) E_{x0n} = -\frac{\omega^2}{c^2} f_0 \left[(\vec{E}_{0, n-1} + \vec{E}_{0, n+1})_x - i(\vec{E}_{0, n-1} - \vec{E}_{0, n+1})_y \right], \quad (35a)$$

$$\left(k_{0n}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} c_0\right) E_{y0n} = -\frac{\omega^2}{c^2} f_0 \left[(\vec{E}_{0, n-1} + \vec{E}_{0, n+1})_y + i(\vec{E}_{0, n-1} - \vec{E}_{0, n+1})_x \right]. \quad (35b)$$

Пренебрегая в этих уравнениях членами $f_0 \vec{E}_{0k}$ с $k \neq 0, -1$, амплитуды полей $\vec{E}_{0, -2}$ и $\vec{E}_{0, +1}$ можно выразить через $\vec{E}_{00}$ и $\vec{E}_{0, -1}$. На ветви, определяемой соотношением (17), имеется еще одна волна с отличной от нуля амплитудой $\vec{E}_{0, -2}$, возбуждаемая волной с амплитудой $\vec{E}_{0, -1}$. В рассматриваемом приближении все амплитуды $\vec{E}_{0k}$ с $k \geq 1$ или $k < -2$ равны нулю. На других ветвях равна нулю также амплитуда $\vec{E}_{0, -2}$. При наличии границ амплитуды $\vec{E}_{00}$ и $\vec{E}_{0, -1}$ определяются из граничных условий, к которым добавляются соответственно соотношения (17a), (18a) и (19a).

Условие применимости теории возмущений является соотношение

$$\left| \frac{\frac{\omega^2}{c^2} f_0}{\left(\frac{4\pi}{\sigma}\right)^2} \right| \ll 1. \quad (36)$$

В заключение заметим, что при $m=2$ (сравни условие (166)) нарушается условие малости амплитуды $\vec{E}_{0, -2}$. При $m=2$ период в два раза больше полудлины волны $\vec{E}_{00}$, что может иметь место для холестерических жидких кристаллов в оптической области. Поступая таким же образом, как в конце пункта 2, между компонентами полей $\vec{E}_{00}$ и $\vec{E}_{0, -2}$ в этом случае получаем следующие соотношения:

$$E_{0x} = -i E_{0y}, \quad E_{-2x} = i E_{-2y}, \quad (37)$$

которые должны быть использованы в качестве дополнительных условий для сшивки амплитуд при наличии границ.

В случае, когда спиральность обусловлена магнитными свойствами [7], соответствующие соотношения получаются из вышеприведенных выражений заменой $\varepsilon_{ik} \leftrightarrow \mu_{ik}$, $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ и $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$.

Выражаю свою глубокую благодарность О. С. Мергеляну и Ян Ши за обсуждение результатов.

Ереванский государственный университет

Поступила 14.II.1972

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. Г. Чистяков. Жидкие кристаллы, Наука, М., 1966. *P. Pincus*. J. Appl. Phys., 41, 974 (1970).
2. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, том III, ч. I, ГИТТЛ, М., 1956.
3. Р. Джеймс. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей, М., 1950. Г. М. Гарибян, Ян Ши. Научные сообщения ЕФИ—16 (1973).
4. О. С. Ерицян, О. С. Мерелян. Изв. АН АрмССР, Физика, 5, 233 (1970). Л. Бриллюэн, М. Пароди. Распространение волн в периодических структурах, М., 1959. Д. Джексон. Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИЛ, М., 1948.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
6. Дж. Кэй, Т. Лэби. Таблицы физических и химических постоянных, Физматгиз, М., 1962.
7. И. Е. Дзялошинский. ЖЭТФ, 46 (1964).

ՍՊԻՐԱԼԱՅԻՆ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՎԵՐԱՔԵՐՅԱԼ

Հ. Ս. ԵՐԻՑՅԱՆ

Քննարկված է էլեկտրամագնիսական ալիքների տարածումը անհամասեռ, սպիրալային կառուցվածք ունեցող միջավայրում: Ստացված նյութական հավասարումների օգնությամբ գտնված և զերլուծված են ամպլիտուդային և ֆազային առնչությունները դիֆրակցված ալիքների համար: Քննարկված է ամպլիտուդների որոշման խնդիրը սահմանների առկայության դեպքում: Վերջում քննարկված են ալիքային խնդրի լուծման կոնկրետ արդյունքները նորմալ անկման դեպքում:

TO THE ELECTRODYNAMICS OF HELICAL MEDIA

O. S. YERITSYAN

The diffraction of electromagnetic wave in anisotropic helical medium is considered. The amplitudes of diffracted waves are determined by means of material equations. The boundary problem in the case of two boundaries is considered.