

О ДИСПЕРСИОННОМ УРАВНЕНИИ В ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, ОБРАЗУЕМОГО В СТОПКЕ ПЛАСТИН

А. Л. АВАКЯН, Г. М. ГАРИБЯН, ЯН ШИ

В работе дан простой вывод точных формул излучения, генерируемого зарядом в слоистой среде как бесконечной, так и конечной длины. Установлена связь между этими формулами. Показана роль дисперсионного уравнения слоистой среды в описании образования излучения. В области рентгеновских частот могут возникнуть узкие и высокие максимумы, если длина волны излучения порядка периода слоистой среды.

В работе [1] были получены формулы для излучения, образуемого заряженной частицей при движении через безграничную среду, состоящую из регулярно расположенных пластин. В работе [2] аналогичные формулы были выведены в случае среды, состоящей из произвольного конечного числа пластин. В обеих работах задача была решена без каких-либо приближений. В дальнейшем формулы работы [2] были проанализированы в рентгеновской области частот в зависимости от параметров стопки и энергии частицы [3—5]. В том случае, когда периодическая неоднородность среды является слабой, задача в приближении теории возмущений была решена в работах [6—8].

В настоящей статье будет установлена связь между формулами работ [1] и [2], а также проведено дальнейшее исследование этих формул.

1. Прежде всего получим формулы для полей излучения, которое возникает, когда заряд движется через стопку пластин с толщинами a и b , заполняющую все пространство. Напишем условия непрерывности полного поля задачи на границе $z=a$:

$$E'_{1t} e^{i\lambda_1 a} + E''_{1t} e^{-i\lambda_1 a} + \frac{ie}{2\pi^2} \frac{z}{\varepsilon_1 (\lambda_1^2 - \omega^2/v^2)} e^{i \frac{\omega}{v} a} = \quad (1)$$

$$= E'_{1t} e^{i\lambda_2 a} + E''_{1t} e^{-i\lambda_2 a} + \frac{ie}{2\pi^2} \frac{z}{\varepsilon_2 (\lambda_2^2 - \omega^2/v^2)} e^{i \frac{\omega}{v} a},$$

$$\frac{\varepsilon_1 E'_{1t} e^{i\lambda_1 a}}{\lambda_1} - \frac{\varepsilon_1 E''_{1t} e^{-i\lambda_1 a}}{\lambda_1} + \frac{ie}{2\pi^2} \frac{\frac{\omega v}{c^2} \mu_1 \varepsilon_1 - \frac{\omega}{v}}{\lambda_1^2 - \omega^2/v^2} e^{i \frac{\omega}{v} a} = \quad (2)$$

$$= \frac{\varepsilon_2 E'_{1t} e^{i\lambda_2 a}}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_2 E''_{1t} e^{-i\lambda_2 a}}{\lambda_2} + \frac{ie}{2\pi^2} \frac{\frac{\omega v}{c^2} \mu_2 \varepsilon_2 - \frac{\omega}{v}}{\lambda_2^2 - \omega^2/v^2} e^{i \frac{\omega}{v} a},$$

где E'_{1t} , E''_{1t} — тангенциальные Фурье-компоненты полей излучения, распространяющихся соответственно вдоль и против направления движения заряда в пластине, характеризующейся ε_1 , μ_1 и расположенной в области $0 < z < a$; E'_{1t} , E''_{1t} — аналогичные величины, относящиеся к области

$a < z < a+b$, характеризующейся ε_2 , μ_2 ; $\lambda_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} - \kappa^2$. Нормировка Фурье-компонент полей совпадает с нормировкой, выбранной в работах [2—4].

Далее следует написать условия непрерывности полей на границе $z=0$. Соответствующие уравнения мы здесь не будем выписывать явно, так как они отличаются от уравнений (1) и (2) только отсутствием всех фазовых множителей и заменой E'_{1t} и E'_{1t} соответственно на E'_{0t} и E'_{0t} , т. е. на поля в области $-b < z < 0$.

Таким образом, мы имеем четыре уравнения, содержащих шесть неизвестных величин E'_{1t} , E'_{1t} , E'_{1t} , E'_{1t} , E'_{0t} и E'_{0t} . Для нахождения этих величин мы воспользуемся соображениями, высказанными в [1] и основанными на симметрии рассматриваемой задачи. Ввиду того, что вся картина полей должна периодически повторяться вдоль оси z с периодом $p=a+b$ и перемещаться вдоль той же оси со скоростью заряда v , потребуем выполнения равенства

$$\vec{E}\left(\vec{r} + p\vec{n}, t + \frac{p}{v}\right) = \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (3)$$

где $\vec{E}(\vec{r}, t)$ — полное поле задачи, $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z . Из условия (3), в частности, следуют равенства

$$E'_{0t} e^{i\left(\frac{\omega}{v} - \lambda_2\right)p} = E'_{1t}, \quad (4)$$

$$E'_{0t} e^{i\left(\frac{\omega}{v} + \lambda_2\right)p} = E'_{1t}. \quad (5)$$

Решая уравнения (1), (2) и аналогичные уравнения, связывающие E'_{1t} , E'_{1t} и E'_{0t} , E'_{0t} , совместно с (4) и (5), можно получить явный вид искомых величин E'_{1t} , E'_{1t} и т. д. При этом для простоты будем считать, что в области $a < z < a+b$, а также в аналогичных областях, получаемых из указанной периодическим повторением, имеется вакуум, т. е. $\mu_2 = \varepsilon_2 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_0$ и, кроме того, $\mu = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\lambda_1 = \lambda$. В результате имеем

$$E'_{1t} = -\alpha' e^{-i\lambda_0 a}, \quad (6)$$

$$E'_{1t} = -\alpha'' e^{i\lambda_0 a}, \quad (7)$$

$$E'_{1t} = -\frac{1}{g_2} [g\alpha' e^{i\lambda_0 b} + g_1 \alpha'' e^{-i\lambda_0 b} + u\beta' e^{i\varphi}] e^{-i\varphi}, \quad (8)$$

$$E'_{1t} = -\frac{1}{g_2} [g_1 \alpha' e^{i\lambda_0 b} + g\alpha'' e^{-i\lambda_0 b} + u\beta'' e^{i\varphi}] e^{-i\varphi}, \quad (9)$$

где

$$\alpha' = \frac{ug_3}{T} (A + Be^{-i\varphi_0 b}),$$

$$\alpha'' = \frac{ug_3}{T} (C + De^{-i\varphi_0 b}),$$

$$\left. \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} = g\beta'' e^{\mp i\lambda a} - g_1\beta' e^{\pm i\lambda a} + g_2\chi'' e^{\pm i\frac{\omega}{v}a},$$

$$\left. \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \right\} = -g_1\beta'' e^{\mp i\lambda a} + g\beta' e^{\pm i\lambda a} + g_2\chi' e^{\pm i\frac{\omega}{v}a},$$

$$\left. \begin{matrix} \beta'' \\ \beta' \end{matrix} \right\} = \frac{\frac{\varepsilon}{\lambda} \mp \frac{v}{\omega}}{\Lambda_0} + \frac{-\frac{1}{\lambda} \pm \frac{v}{\omega}}{\Lambda},$$

(10)

$$\left. \begin{matrix} \chi'' \\ \chi' \end{matrix} \right\} = \frac{-\frac{1}{\lambda_0} \pm \frac{v}{\omega}}{\Lambda_0} + \frac{\frac{1}{\lambda_0\varepsilon} \mp \frac{v}{\omega}}{\Lambda},$$

$$\Lambda_0 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \Lambda = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon, \quad k_z = \frac{\omega}{v}, \quad \varphi = \frac{\omega}{v}(a+b),$$

$$\varphi'_0 = \frac{\omega}{v} - \lambda_0, \quad \varphi''_0 = \frac{\omega}{v} + \lambda_0, \quad g = \frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}, \quad g_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}, \quad (11)$$

$$g_2 = \frac{2\varepsilon}{\lambda}, \quad g_3 = \frac{\lambda\lambda_0}{4\varepsilon}, \quad u = \frac{e i \chi}{2\pi^2}, \quad T = 1 - 2\zeta e^{-i\varphi} + e^{-2i\varphi},$$

$$\zeta = \cos \lambda a \cos \lambda_0 b - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon\lambda_0} + \frac{\varepsilon\lambda_0}{\lambda} \right) \sin \lambda a \sin \lambda_0 b. \quad (12)$$

Подставляя (10) в (6)–(9), можно показать, что полученные формулы совпадают с формулами работы [1]. При этом необходимо принять во внимание отличие в нормировках Фурье-компонент полей, различие в расположении начала отсчета оси z , а также то, что в формулах (21) работы [1] содержатся описки, а именно, первая фигурная скобка, входящая в выражение для C , должна быть умножена на $k_{\perp}^2/\omega$, а вторая фигурная скобка — на $k_{\perp}^2/v$. Аналогичные исправления должны быть сделаны и в выражении для D формулы (21) работы [1].

2. Рассмотрим теперь случай, когда заряд пролетает через стопку, состоящую из произвольного конечного числа N пластин, расположенных между плоскостями $z = 0$ и $z = Na + (N-1)b$.

Для решения этой задачи мы воспользуемся теми полями, которые были получены в предыдущем разделе. В бесконечной стопке поля излучения в первой пластине определялись бы формулами (8) и (9). Поля E'_{Nl} , E''_{Nl} в N -ой пластине определялись бы тогда согласно (3)

$$E'_{Nl} = E'_{1l} e^{i\left(\frac{\omega}{v} - \lambda\right)(N-1)p}, \quad (13)$$

$$E''_{Nl} = E''_{1l} e^{i\left(\frac{\omega}{v} + \lambda\right)(N-1)p}. \quad (14)$$

Однако на самом деле, стопка является конечной, поэтому вне стопки пластин поля излучения должны распространяться только на бесконечность. Для того, чтобы удовлетворить этим условиям, необходимо к полям, полученным в предыдущем разделе, добавить внутри стопки общее решение однородных уравнений Максвелла и сшить их на первой и последней границах стопки с полем заряда и полями излучений вне стопки.

Общее решение однородных уравнений Максвелла внутри стопки следует построить из соответствующих решений для пластин и вакуумных отсеков с учетом условий сшивки.

Внутри пластины общее решение однородной задачи можно записать в виде линейной комбинации свободных полей, движущихся вдоль и против направления оси z , т. е. $\tilde{E}' e^{i\lambda z} + \tilde{E}'' e^{-i\lambda z}$. В вакуумных отсеках аналогично имеем $\tilde{E}' e^{i\lambda_0 z} + \tilde{E}'' e^{-i\lambda_0 z}$.

Условия сшивки свободных полей на границе $z=a$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{E}'_{1l} e^{i\lambda a} + \tilde{E}''_{1l} e^{-i\lambda a} &= \tilde{E}'_{1l} e^{i\lambda_0 a} + \tilde{E}''_{1l} e^{-i\lambda_0 a}, \\ \frac{\varepsilon}{\lambda} (\tilde{E}'_{1l} e^{i\lambda a} - \tilde{E}''_{1l} e^{-i\lambda a}) &= \frac{1}{\lambda_0} (\tilde{E}'_{1l} e^{i\lambda_0 a} - \tilde{E}''_{1l} e^{-i\lambda_0 a}). \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогичные условия можно написать на границе $z=p$ для полей $\tilde{E}'_{1l}$, $\tilde{E}''_{1l}$ и $\tilde{E}'_{2l}$, $\tilde{E}''_{2l}$. Исключая из этих условий величины $\tilde{E}'_{1l}$ и $\tilde{E}''_{1l}$, можно найти связь между свободными полями в первой и во второй пластине

$$\tilde{E}'_{2l} = e^{-i\lambda p} (m_2 \tilde{E}'_{1l} - n_2 \tilde{E}''_{1l}), \quad (16)$$

$$\tilde{E}''_{2l} = e^{i\lambda p} (-m_1 \tilde{E}'_{1l} + n_1 \tilde{E}''_{1l}),$$

где

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -\frac{1}{4\varepsilon\lambda\lambda_0} (\varepsilon^2\lambda_0^2 - \lambda^2) (e^{i\lambda_0 b} - e^{-i\lambda_0 b}) e^{i\lambda a}, \\
 n_1 &= \frac{1}{4\varepsilon\lambda\lambda_0} [(\varepsilon\lambda_0 + \lambda)^2 e^{-i\lambda_0 b} - (\varepsilon\lambda_0 - \lambda)^2 e^{i\lambda_0 b}] e^{-i\lambda a}, \\
 m_2 &= \frac{1}{4\varepsilon\lambda\lambda_0} [(\varepsilon\lambda_0 + \lambda)^2 e^{i\lambda_0 b} - (\varepsilon\lambda_0 - \lambda)^2 e^{-i\lambda_0 b}] e^{i\lambda a}, \\
 n_2 &= \frac{1}{4\varepsilon\lambda\lambda_0} (\varepsilon^2\lambda_0^2 - \lambda^2) (e^{i\lambda_0 b} - e^{-i\lambda_0 b}) e^{-i\lambda a}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

С другой стороны, в силу известной теоремы Флоке [9] свободные поля в периодической среде должны удовлетворять условиям

$$\tilde{\mathbf{E}}'_{2l} e^{i\lambda p} = \rho \tilde{\mathbf{E}}'_{1l}, \tag{18}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^*_{2l} e^{-i\lambda p} = \rho \tilde{\mathbf{E}}^*_{1l},$$

где $|\rho| = 1$. Комбинируя (16) и (18), получаем, что величина ρ должна удовлетворять уравнению

$$\rho^2 - 2\zeta\rho + 1 = 0, \tag{19}$$

где ζ определяется формулой (12), и

$$\tilde{\mathbf{E}}^*_{1l} = \tilde{\mathbf{E}}'_{1l} \frac{m_2 - \rho_2}{n_2} \quad (j = 1, 2). \tag{20}$$

Отсюда получаем два линейно независимых решения однородных уравнений Максвелла, удовлетворяющих теореме Флоке,

$$\mathbf{E}^{cb}_{jl} \left(e^{i\lambda z} + \frac{m_2 - \rho_2}{n_2} e^{-i\lambda z} \right) \quad (0 < z < a). \tag{21}$$

Аналогичные решения можно получить и для свободных полей в вакуумных отсеках $a \leq z \leq p$.

Таким образом, поперечные Фурье-компоненты полных полей внутри первой и последней пластин соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}'_{1l} e^{i\lambda z} + \mathbf{E}''_{1l} e^{-i\lambda z} - \frac{u}{\varepsilon\Lambda} e^{i\frac{\omega}{v}z} + \mathbf{E}^{cb}_{1l} \left(e^{i\lambda z} + \frac{m_2 - \rho_1}{n_2} e^{-i\lambda z} \right) + \\
 + \mathbf{E}^{cb}_{2l} \left(e^{i\lambda z} + \frac{m_2 - \rho_2}{n_2} e^{-i\lambda z} \right),
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\mathbf{E}'_{1l} e^{i\lambda z} + \mathbf{E}''_{1l} e^{-i\lambda z} - \frac{u}{\varepsilon\Lambda} e^{i\frac{\omega}{v}z} \right) e^{i\frac{\omega}{v}(N-1)p} + \\
 & + \rho_1^{N-1} \mathbf{E}^{cb}_{1l} \left(e^{i\lambda z} + \frac{m_2 - \rho_1}{n_2} e^{-i\lambda z} \right) + \rho_2^{N-1} \mathbf{E}^{cb}_{2l} \left(e^{i\lambda z} + \frac{m_2 - \rho_2}{n_2} e^{-i\lambda z} \right).
 \end{aligned} \tag{23}$$

С другой стороны, поперечные Фурье-компоненты полных полей до стопки ($z < 0$) и за стопкой ($z > Na + (N-1)b$) соответственно есть

$$E_1'' e^{-i\lambda_0 z} - \frac{u}{\varepsilon \Lambda} e^{i \frac{\omega}{v} z}, \quad (24)$$

$$E_1' e^{i\lambda_0 z} - \frac{u}{\varepsilon \Lambda} e^{i \frac{\omega}{v} z}. \quad (25)$$

В выражениях (22)–(25) величины E_{11}^{cb} , E_{21}^{cb} , E_1' и E_1'' являются пока неизвестными. Сшивая поля (22)–(25) на границах стопки $z=0$ и $z=Na+(N-1)b$, получаем четыре линейных неоднородных алгебраических уравнения относительно этих величин. Решая эту систему уравнений, можно найти для них явные выражения. В частности, выражения для E_1' и E_1'' полностью совпадают с соответствующими выражениями, приведенными в [10] (см. (41) и (42) из цитированной работы).

Заметим, что формулы для бесконечной стопки можно получить из формул для конечной стопки, если совершить соответствующий предельный переход. Для этого необходимо воспользоваться формулами (39) и (40) работы [10] для полей излучения в m -ом отсеке внутри конечной стопки и переместить начало отсчета оси z так, чтобы оно оказалось в середине стопки. Затем если положить, например, $m=N/2$, а также учесть небольшое поглощение в пластинках, то после устремления N к бесконечности получим формулы (6) и (7) предыдущего раздела.

3. Формулы (6)–(9) для случая бесконечной стопки в знаменателях содержат величины T и Λ , которые могут обратиться в нуль. Однако анализ числителей показывает, что только при $T=0$ или, другими словами,

$$\cos \varphi - \zeta = 0 \quad (26)$$

величины (6)–(9) содержат полюса. При $\Lambda=0$ полюса не возникают, поскольку числители также обращаются в нуль и имеют тот же порядок малости, что и знаменатели. Это связано с тем обстоятельством, что рассматриваемая периодическая слоистая среда состоит из пластин конечной толщины, для которых известно, что полюс при $\Lambda=0$ отсутствует (см. [11, 12]).

Таким образом, единственными полюсами Фурье-компонент полей излучений в бесконечной периодической слоистой среде, помимо (22 а) и (22 б) работы [1], являются только (22 с), т. е. $T=0$. Следуя [1], будем называть уравнение $T=0$ дисперсионным уравнением слоистой среды.

При вычислении самих полей излучения необходимо проинтегрировать Фурье-компоненты с соответствующими фазовыми множителями по χ от нуля до бесконечности. Такое интегрирование для далекой точки наблюдения удобнее всего проводить методом перевала. При этом оказывается, что вклад точки перевала, находящейся на действительной оси при $\chi=(\omega/c)\sin\vartheta$ (ϑ — угол излучения), соответствует сферической волне. Если же Фурье-компоненты имеют полюса и эти полюса вносят вклад в интеграл, мы

имеем дополнительное излучение, представляющее собой цилиндрическую волну (см. [13]).

Для того, чтобы лучше представить себе ситуацию в слоистой среде, полезно провести аналогию с черенковским излучением в безграничной однородной среде и в пластине конечной толщины. В бесконечной однородной среде полюс, определяемый уравнением $\Lambda = 0$, соответствует черенковскому излучению. Однако в пластине конечной толщины, как это было отмечено несколько выше, такой полюс отсутствует. В этом случае все излучение получается за счет вклада от точки перевала. При этом если толщина пластины велика по сравнению с длиной излучаемой волны, то это излучение можно разбить на две части — на переходное излучение, образуемое на границах пластины, и на черенковское излучение, образуемое на всей толщине пластины. Если же толщина пластины недостаточно велика, такое разбиение теряет свой смысл.

Как будет показано ниже, аналогичная ситуация имеет место и в случае стопки, только роль полюса $\Lambda = 0$ играет полюс, определяемый дисперсионным уравнением $T = 0$. Оказывается, что полюс $T = 0$ отсутствует в случае, когда стопка конечна.

Действительно, в числителях формул (41) и (42) работы [10] содержится комбинация

$$U_{N-2} - U_{N-1} e^{\pm i\varphi} + e^{\pm iN\varphi}, \quad (27)$$

где $U_N = U_N(\zeta)$ — полином Чебышева второго рода. При ζ , удовлетворяющих дисперсионному уравнению (26), имеем

$$U_N = \frac{\sin[(N+1)\varphi]}{\sin\varphi}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), легко убедиться, что комбинация (27) обращается в нуль. Аналогично, другая комбинация величин, входящая в числители тех же формул,

$$Q_N - Q_{N+1} e^{\pm i\varphi} + e^{\pm iN\varphi} (N_1 e^{\pm i\varphi} - 1) \equiv N_1 [U_{N-1} - U_N e^{\pm i\varphi} + e^{\pm i(N+1)\varphi}] + \\ + U_{N-2} - U_{N-1} e^{\pm i\varphi} + e^{\pm iN\varphi} \quad (29)$$

также обращается в нуль при выполнении условия (26). Таким образом, числители формул (41) и (42) работы [10], содержащие только комбинации выражений (27) и (29), обращаются в нуль при $T = 0$.

Покажем, однако, что хотя при $T = 0$ в случае конечной стопки Фурье-компоненты не содержат полюса, при достаточно больших значениях $l = Np - b$ они имеют острые максимумы.

Для простоты ограничимся случаем рентгеновских частот. В работе [5] были получены соответствующие формулы для Фурье-компонент излучения, распространяющегося до и после стопки (формулы (15) и (16) работы [5]). Эти формулы можно разложить в окрестности $\nu = \nu_0$, где ν — относительное отклонение частоты от брэгговской $\omega_B = \pi ch/p$, ν_0 определяется формулой (19) работы [5]. В результате имеем

$$\begin{aligned}
 E_{N, t}(\vec{k}, N) = & -\frac{u'}{Q} e^{i\left(\frac{\omega}{v} - \gamma_0\right)t} \left\{ \left(g_0 - \tilde{\gamma}_0 \frac{a}{p} \right) \left(e^{-i\frac{\omega l}{c} \Delta_2} - e^{-i\frac{\omega l}{c} \Delta_1} \right) - \right. \\
 & - \frac{i}{2} \left[\frac{g_h'^2 \tilde{\gamma}_0 b}{\tilde{\eta} p} + 4(\nu - \nu_0) \left(\tilde{\gamma}_0 \frac{a}{p} - g_0' \right) \right] \times \\
 & \times \left[\frac{\sin \left[\frac{\omega l}{c} \left(\frac{a_1}{4} - (\nu - \nu_0) a_2 - i \frac{\delta}{4} \right) \right]}{\frac{a_1}{4} - (\nu - \nu_0) a_2 - i \frac{\delta}{4}} \exp \left[i \frac{\omega l}{4c} \left(\tilde{\gamma}_0 + g_0' + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}} - 4(\nu - \nu_0) (a_2 + 2) \right) + \frac{\omega l}{4c} \delta \right] - \frac{\sin \left[\frac{\omega l}{c} \left((\nu - \nu_0) a_3 + i \frac{\delta}{4} \right) \right]}{(\nu - \nu_0) a_3 + i \frac{\delta}{4}} \right] \times \\
 & \times \exp \left[i \frac{\omega l}{4c} \left(2 \left(g_0' + \frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}} \right) + 4(\nu - \nu_0) (a_2 - 2) \right) - \frac{\omega l}{4c} \delta \right] \left. \right\}, \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{0, t}(\vec{k}, N) = & -\frac{u' g_h}{Q} \left\{ e^{-i\frac{\omega l}{c} \Delta_2} - e^{-i\frac{\omega l}{c} \Delta_1} + \frac{i}{2} \frac{\tilde{\gamma}_0 b}{p} \times \right. \\
 & \times \left[\frac{\sin \left[\frac{\omega l}{c} \left(\frac{a_1}{4} - (\nu - \nu_0) a_2 - i \frac{\delta}{4} \right) \right]}{\frac{a_1}{4} - (\nu - \nu_0) a_2 - i \frac{\delta}{4}} \exp \left[i \frac{\omega l}{4c} \left(\tilde{\gamma}_0 + g_0' + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}} + 4(\nu - \nu_0) a_2 \right) - \frac{\omega l}{4c} \delta \right] - \frac{\sin \left[\frac{\omega l}{c} \left((\nu - \nu_0) a_3 + i \frac{\delta}{4} \right) \right]}{(\nu - \nu_0) a_3 + i \frac{\delta}{4}} \right] \times \\
 & \times \exp \left[-i \frac{\omega l}{c} (\nu - \nu_0) a_3 + \frac{\omega l}{4c} \delta \right] \left. \right\}, \quad (31)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a' = & \frac{[ei \times (g_0 p/a) c^2]}{2 \pi^2 \omega^2 \tilde{\gamma}_0 (\tilde{\gamma}_0 - g_0 p/a)}, \quad \tilde{\eta} = \tilde{\gamma}_0 - g_0', \quad a_1 = \tilde{\eta} - \frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}}, \\
 a_2 = & \frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}^2 - g_h'^2}, \quad a_3 = \frac{\tilde{\eta}^2}{\tilde{\eta}^2 - g_h'^2}, \quad \delta = \frac{g_0' (\tilde{\eta}^2 + g_h'^2) + 2 (g_h' g_h'')}{\tilde{\eta}^2 - g_h'^2},
 \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = -\frac{\tilde{\eta}_0}{2} + 2(\nu - \nu_0) \alpha_3 + \frac{i}{2} \delta, \quad \Delta_2 = -\frac{1}{2} \left(g'_0 + \frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}} \right) - 2(\nu - \nu_0) \alpha_2 - \frac{i}{2} \delta,$$

$$Q = \left[-\frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}} - 4(\nu - \nu_0) \alpha_2 - i(\delta - g'_0) \right] \times \\ \times \exp \left[i \frac{\omega l}{2c} \left(g'_0 + \frac{g_h' g_h'}{\tilde{\eta}} + 4(\nu - \nu_0) \alpha_2 \right) - \frac{\omega l}{2c} \delta \right] - \\ - \left[-\tilde{\eta} + 4(\nu - \nu_0) \alpha_3 + i(\delta + g'_0) \right] \exp \left[i \frac{\omega l}{2c} (\tilde{\eta}_0 - 4(\nu - \nu_0) \alpha_3) + \frac{\omega l}{2c} \delta \right].$$

Посмотрим, какой вид примут формулы (30) и (31) точно при $\nu = \nu_0$. Для того, чтобы полученные результаты были более наглядными, рассмотрим их в двух предельных случаях, когда поглощение в стопке мало, т. е. когда стопка «тонкая», и в противоположном случае, когда это поглощение велико, т. е. когда стопка «толстая».

В первом случае, когда

$$\left| \frac{\omega}{c} l \delta \right| \ll 1, \quad (32)$$

имеем

$$E_{N, l}(\vec{k}, N) = -u' e^{i \frac{\omega l}{2c} \tilde{\eta}_0} M', \quad (33)$$

$$E_{0, l}(\vec{k}, N) = -u' M'', \quad (34)$$

где

$$M' = \frac{1}{Q} \left\{ \left(g_0 - \tilde{\eta}_0 \frac{\alpha}{p} \right) \left[e^{i \frac{\omega l}{2c} \left(g'_0 + \frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}} \right)} - e^{i \frac{\omega l}{2c} \tilde{\eta}_0} \right] - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \frac{\tilde{\eta}_0 b}{\tilde{\eta} p} g_h'^2 \left[\frac{4 \sin \left(\frac{\omega l}{4c} \alpha_1 \right)}{\alpha_1} e^{i \frac{\omega l}{2c} \tilde{\eta}_0} - \frac{\omega l}{c} \right] e^{i \frac{\omega l}{2c} \left(g'_0 + \frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}} \right)} \right\}, \quad (35)$$

$$M'' = \frac{g_h'}{Q} \left\{ e^{i \frac{\omega l}{2c} \left(g'_0 + \frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}} \right)} - e^{i \frac{\omega l}{2c} \tilde{\eta}_0} + \frac{i}{2} \frac{\tilde{\eta}_0 b}{p} \times \right. \\ \times \left[\frac{4 \sin \left(\frac{\omega l}{4c} \alpha_1 \right)}{\alpha_1} e^{i \frac{\omega l}{2c} \left(g'_0 + \frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}} \right)} - \frac{\omega l}{c} \right] e^{i \frac{\omega l}{2c} \tilde{\eta}_0} \right\}, \quad (36)$$

$$Q = -\frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}} e^{i \frac{\omega l}{2c} \left(g'_0 + \frac{g_h'^2}{\tilde{\eta}} \right)} + \tilde{\eta} e^{i \frac{\omega l}{2c} \tilde{\eta}_0}.$$

Во втором случае, когда

$$\left| \frac{\omega}{c} l \right| \gg 1, \quad (37)$$

получаем, что $E_{N,1}(\vec{k}, N)$ и $E_{0,1}(\vec{k}, N)$ выражаются с помощью тех же формул (33) и (34), в которых теперь

$$M' = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\gamma_0 a}{p} - g_0 - \frac{\gamma_0 b g_h'^2}{p(\gamma_1^2 - g_h'^2)} \right\}, \quad (38)$$

$$M'' = -\frac{g_h}{\gamma} \frac{i \gamma_0 b}{p \delta}. \quad (39)$$

Из полученных формул нетрудно видеть, что отмеченные выше острые максимумы в переходном излучении могут существовать, если только длина волны излучения порядка размеров периода среды p или a . Действительно, в том случае, когда длина волны излучения много меньше периода неоднородности, т. е. когда имеет место высокий порядок отражения, величина g_h , как это видно из ее определения, будет мала. Тогда из формул (36) и (39) следует, что $M'' \rightarrow 0$, так как эта величина прямо пропорциональна g_h . С другой стороны, из формул (35) и (38) видно, что если $g_h \rightarrow 0$, то величина M' становится такой, что в результате поле (33) превращается в то поле, которое следует из обычной теории переходного излучения без острых максимумов [3, 8]. То, что при этом мы получаем формулу для одной пластины и для одной границы, связано с тем, что при выводе формул (30) и (31) было предположено, что $p \ll c/\omega \gamma$ (см. [5]).

Совершенно другая картина имеет место тогда, когда $g_h \sim g_0$, т. е. длина волны излучения порядка периода неоднородности. В этом случае из (35) и (36) следует, что при $\left| \frac{\omega l}{c} \delta \right| \ll 1$ и $\left| \frac{\omega l}{c} g_0' \right| \ll 1$ амплитуда поля порядка поля обычного переходного излучения. С другой стороны, из формулы (38) следует, что при $\left| \frac{\omega l}{c} \delta \right| \ll 1$ излучение, испускаемое вперед, будет порядка излучения, образуемого на одной границе раздела сред. Наибольший интерес представляет излучение, испускаемое назад, которое будет усилено из-за наличия в знаменателе формулы (39) для M'' малой величины δ .

4. Рассмотрим теперь случай малых частот, когда длина волны много больше периода стопки p , т. е.

$$\frac{\omega}{v} p \ll 1, \quad \lambda a \ll 1, \quad \lambda_0 b \ll 1.$$

Разложим косинусы и синусы в дисперсионном уравнении (26) с учетом (12) в ряд по степеням своих аргументов и ограничимся низшими членами. Тогда вместо (26) получим

$$-\frac{p^2}{\beta^2} + \varepsilon a^2 + b^2 + (1 + \varepsilon)ab - \frac{\chi^2 c^2}{\omega^2} \left(a^2 + b^2 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} ab \right) = 0,$$

откуда

$$|\chi| = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{-p^2/\beta^2 + \varepsilon a^2 + b^2 + (1 + \varepsilon)ab}{a^2 + b^2 + (1 + \varepsilon^2)ab/\varepsilon}}.$$

Этот полюс в случае бесконечной периодической среды вносит вклад только тогда, когда

$$a^2 + b^2 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} ab \geq \varepsilon a^2 + b^2 + (1 + \varepsilon)ab - \frac{p^2}{\beta^2} > 0. \quad (40)$$

Излучение, описываемое этим полюсом, имеет, с одной стороны, природу переходного излучения, поскольку оно образуется на регулярно расположенных неоднородностях. С другой стороны, благодаря условиям (40) оно во многом схоже с черенковским излучением. В работе [1] оно было названо параметрическим черенковским излучением. Заметим, что при $b=0$ условия (40) переходят в неравенства

$$1 \geq \varepsilon - \beta^{-2} \geq 0,$$

известные из теории черенковского излучения.

Ереванский физический институт

Поступила 10.IV.1973

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк. ЖЭТФ, 32, 883 (1957).
2. Г. М. Гарибян. ЖЭТФ, 35, 1435 (1958).
3. Г. М. Гарибян, И. И. Гольдман. ДАН АрмССР, 31, 219 (1960).
4. Г. М. Гарибян. Препринт ЕФИ-ТФ-4 (70); ЖЭТФ, 60, 39 (1971).
5. А. Л. Авакян, Г. М. Гарибян, Ян Ши. Изв. АН АрмССР, Физика, 8, 3 (1973).
6. П. В. Блюх. Изв. вузов, Радиофизика, 2, 63 (1959).
7. М. А. Тер-Микаелян. ДАН СССР, 134, 318 (1960).
8. М. А. Тер-Микаелян, А. Д. Газазян. ЖЭТФ, 39, 1693 (1960).
9. Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, 1963, т. II.
10. В. А. Аракелян, Г. М. Гарибян. Изв. АН АрмССР, 4, 339 (1969).
11. Г. М. Гарибян. Диссертация, ИТЭФ (1961).
12. В. Е. Пафомов. Труды ФИАН СССР, 54, 28 (1969).
13. Г. М. Гарибян. ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).

ԴԻՍՊԵՐՍԻՈՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ՇԵՐՏՈՒՄ ԱՌԱՋԱՑԱՌ ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա. Լ. ԱՎԱԳՅԱՆ, Գ. Մ. ՂԱՐԻՔՅԱՆ, ՅԱՆ ՇԻ

Աշխատանքում տրված է լիցքով զենեղացված ճառագայթման ճշգրիտ բանաձևերի պարզ դուրս բերումը ինչպես անվերջ, այնպես էլ վերջավոր շափի շերտավոր միջավայրում: Կապ է հաստատված այդ բանաձևերի միջև Յուլյե է տրված շերտավոր միջավայրի դիսպերսիոն հավասարման դերը ճառագայթման ձևավորման մեջ: Ռենտգենյան հաճախությունների տիրույթում կարող են առաջանալ նեղ և բարձր մաքսիմումներ, եթե ճառագայթման ալիքի երկարությունը շերտավոր միջավայրի պարբերության կարգի է:

ON THE DISPERSION EQUATION IN THE THEORY OF TRANSITION RADIATION PRODUCED IN A STACK OF PLATES

A. L. AVAKIAN, G. M. GARIBIAN, C. YANG

A simple derivation of exact formulae for the radiation produced by a charge in a laminar medium of infinite and finite length is given. The relation between these formulae is obtained. The role of the dispersion equation in the radiation production in a laminar medium is shown. In X-Ray frequency range narrow and high-maxima may arise if the radiation wavelength is of the order of the period of laminar medium.