

ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В КЛИНЕ, ЛЕЖАЩЕМ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. К. КУЗНЕЦОВ

Ранее в работах автора было получено решение задачи о звуковом поле точечного источника в клине с идеально отражающими границами. Здесь в ВКБ-приближении дается решение более сложной задачи о звуковом поле точечного источника в клине, лежащем на полупространстве.

Геометрия задачи и ориентация цилиндрической системы координат показаны на рис. 1. Клин с углом раствора Φ заполнен жидкой средой; полупространство также считается жидким. Обозначим плотности сред и вол-

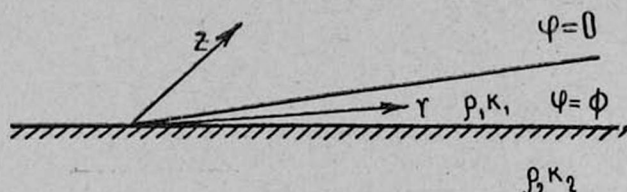


Рис. 1.

новые числа соответственно через ρ_1 , k_1 и ρ_2 , k_2 . Показатель преломления на границе $\varphi = \Phi$ обозначим через $n = k_2/k_1$. Здесь мы рассматриваем случай волноводного распространения в клине, т. е. случай $n < 1$.

Волновые поля в клине и в полупространстве определяются волновыми уравнениями

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \varphi^2} + k_1^2 \Psi_1 = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \Phi, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \varphi^2} + k_2^2 \Psi_2 = 0, \quad \Phi \leq \varphi \leq \pi + \Phi \quad (16)$$

и следующими условиями на границах:

$$\Psi_1 = 0 \text{ на границе } \varphi = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi}, \quad \Psi_1 = \Psi_2 \text{ на границе } \varphi = \Phi,$$

$$\Psi_2 = 0 \text{ на границе } \varphi = \pi + \Phi.$$

В работе [1] было показано, что путем нестрогого разделения переменных для достаточно больших значений r аналогично решению задачи для идеального клина [2—4] получается приближенное решение системы уравнений (1) в виде ряда нормальных волн

$$\Psi_1 = \sum_m A_m W_m(r, z) \sin(\mu_1 \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \Phi, \quad (2a)$$

$$\Psi_2 = \sum_m B_m W_m(r, z) e^{-i\mu_2(\varphi - \Phi)}, \quad \Phi \leq \varphi \leq \pi + \Phi. \quad (26)$$

Квазиконстанты разделения переменных μ_1 и μ_2 — слабо зависящие от r величины — связаны между собой соотношением

$$k_1^2 - \mu_1^2/r^2 = k_2^2 + \mu_2^2/r^2$$

и определяются параметрами сред через трансцендентное уравнение, аналогичное дисперсионному уравнению в задаче распространения звука в слое, лежащем на полупространстве [5],

$$\mu_1 \Phi = m\pi - \arctg \left[l \frac{\mu_1}{\sqrt{k_1^2 r^2 (1 - n^2) - \mu_1^2}} \right], \quad (3)$$

где $l = \rho_2/\rho_1$, а $m = 1, 2, 3, \dots$ обозначает порядок нормальной волны.

Из уравнения (3) видно, что действительные решения его получаются только в области

$$r \geq r_m = \frac{(2m-1)\pi}{2k_1\Phi\sqrt{1-n^2}}. \quad (3a)$$

Это означает, что в отношении каждой отдельной нормальной волны вся область подразделяется на две подобласти, в одной из которых ($r > r_m$) нормальная волна распространяется без затухания, а в другой ($r < r_m$) она распространяться не может. В соответствии с этим подобласть $r > r_m$ назовем волноводной зоной для нормальной волны порядка m , а подобласть $r < r_m$ — неволноводной зоной. Границу между ними $r = r_m$ назовем линией выхода нормальной волны из клина в полупространство. Смысл последнего определения выяснится потом.

Функции $\sin \mu_1 \varphi$ и $e^{-i\mu_2 \varphi}$ описывают профили нормальных волн, т. е. характерные для нормальных волн распределения амплитуды звукового давления вдоль угловой координаты φ . Спектральные коэффициенты A_m определяют меру возбуждения нормальной волны порядка m .

Задача сводится, следовательно, к нахождению функции $W_m(r, z)$, описывающей распространение отдельной нормальной волны в волноводной зоне. Было показано [1], что функция

$$W_m(r, z) = r^{-1/2} V_m(r, z) \quad (4)$$

определяется волновым уравнением для слоисто-неоднородной среды с показателем преломления n_m , зависящим от r ,

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} + k_1^2 (1 - \mu_1^2/k_1^2 r^2) V_m = 0. \quad (5)$$

В отличие от показателя преломления на границе сред $n = k_2/k_1$

$$n_m(r) = [1 - \mu_1^2/k_1^2 r^2]^{1/2} \quad (6)$$

назовем приведенным показателем преломления.

Таким образом, решение трехмерных волновых уравнений (1) с выписанными граничными условиями сводится, по существу, к решению двумерного волнового уравнения (5), описывающего распространение отдельной нормальной волны в волноводной зоне.

Рассмотрим здесь нормальные волны, возбуждаемые точечным источником с координатами r_0, z_0, φ_0 , расположенным в волноводной зоне клина ($r_0 > r_m$).

Подробное обсуждение вопроса о спектре нормальных волн точечного источника выходит за рамки данной статьи. В принятом здесь приближении спектр нормальных волн точечного источника в клине можно записать по аналогии со спектром нормальных волн в задаче о точечном источнике в плоском слое, лежащем на полупространстве [5],

$$A_m = \frac{2\pi}{\Phi} \sin \mu_1 \varphi_0 \frac{\mu_1}{F(\mu_1)}, \quad B_m = \rho_1/\rho_2 A_m \sin \mu_1 \Phi e^{\mu_2 \Phi},$$

$$F(\mu_1) = \mu_1 \Phi - \sin \mu_1 \Phi \cos \mu_1 \Phi - 1/\mu_1^2 \sin^2 \mu_1 \Phi \operatorname{tg} \mu_2 \Phi.$$

По аналогии с задачей о плоском слое, лежащем на полупространстве, и с учетом вида уравнения (5) можно показать, что точечный источник звука («трехмерная» точка r_0, z_0, φ_0) возбуждает нормальные волны, расходящиеся из точки r_0, z_0 («двумерной» точки), т. е. функция $V_m(r, z)$ в этом случае описывается неоднородным уравнением

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} + k_1^2 (1 - \mu_1^2/k_1^2 r^2) V_m = -\delta(r - r_0, z - z_0). \quad (7)$$

Один из методов решения этого уравнения основан на решении более простого уравнения

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_m}{\partial r^2} + k_1^2 (1 - \mu_1^2/k_1^2 r^2) U_m = -\delta(r - r_0), \quad (8)$$

т. е. уравнения для нормальной волны, возбуждаемой линейным источником $r=r_0$. Такую нормальную волну мы будем называть плоской нормальной волной в отличие от расходящейся из точечного источника нормальной волны. По аналогии с интегральным представлением цилиндрической волны в свободном однородном пространстве через плоские волны можно показать, что решение уравнения (7) представляется через решения уравнения (8) в виде интеграла

$$V_m = \int_{-\infty}^{+\infty} U_m(r, z, r_0, \zeta) d\zeta \quad (9)$$

(симметрия задачи позволяет без ограничения общности при выводе формул положить $z_0=0$).

Решение уравнения (8) найдем в приближении ВКБ. Специфичная для решения данной задачи трудность обусловлена трансцендентностью выражения $\mu_1(r)$ (см. (3)), не позволяющей решать уравнение (8) обычным способом. Эта трудность преодолевается путем перехода к параметри-

ческой форме решения задачи. Уравнение (3) в параметрической форме запишется так

$$k_1 r = \mu_1 / \cos \psi, \quad (10)$$

$$\mu_1 \Phi = m\pi - \arctg \left[l \frac{\cos \psi}{\sqrt{\sin^2 \psi - n^2}} \right].$$

Параметр этой системы $\cos \psi$ изменяется в пределах

$$0 < \cos \psi \leq \sqrt{1 - n^2}, \quad (11)$$

соответствующих пределам изменения $r_m \leq r < \infty$ координаты r в волноводной зоне. Тогда в параметрической форме ВКБ-решение уравнения (8) получается в виде

$$U_m = U_m^- + U_m^+ = \frac{k_1 r^{1/2} r_0^{1/2} [e^{ik_1 \eta_-} + v(\vartheta_0) e^{ik_1 \eta_+}]}{\sqrt{k_1^2 r_0^2 (1 - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0) - \mu_1^2(r_0)} \sqrt{k_1^2 r^2 (1 - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0) - \mu_1^2(r)}}, \quad (12)$$

т. е. в виде наложения прямой волны U_m^- и отраженной волны U_m^+ . Здесь через ϑ_0 обозначен угол выхода нормальной волны из источника, изображенный на рис. 2, а через $\sin \psi_0$ — значение параметра $\sin \psi$

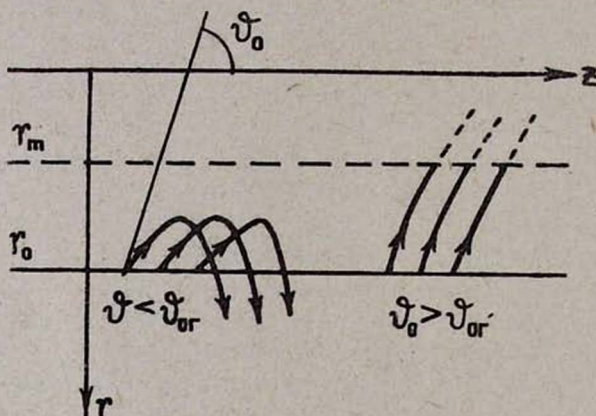


Рис. 2.

в источнике $r = r_0$, $k_1 \eta_-$ и $k_1 \eta_+$ — фазы соответственно прямой и отраженной волн, $v(\vartheta_0)$ — коэффициент отражения. На рис. 2 изображен ход лучей нормальной волны. Траектории этих лучей описываются параметрической системой уравнений

$$r = \frac{1}{\Phi k_1 \cos \psi} \left\{ m\pi - \arctg \left(l \frac{\cos \psi}{\sqrt{\sin^2 \psi - n^2}} \right) \right\}, \quad (13a)$$

$$z = r t \frac{\sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0}{1 - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0} + \frac{\sqrt{1 - n^2} \sin \psi_0 \cos \vartheta_0}{\Phi k_1 \sqrt{a} (1 - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0)} \times \\ \times \operatorname{arth} \left[\frac{t l \sqrt{1 - n^2} \sin \psi_0 \cos \vartheta_0}{\sqrt{a} \sqrt{(1 + t^2) \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0 - n^2}} \right] + \text{const}, \quad (136)$$

$$\alpha = (l^2 - 1) \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0 + (1 - n^2).$$

Для лучей, углы выхода которых ϑ_0 удовлетворяют неравенству $\sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0 > n^2$, в выражении (136) берется arth , в случае $\sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0 < n^2$ берется arcth . Для граничного угла, разделяющего эти два промежутка углов выхода,

$$|\vartheta_0| = \vartheta_{\text{ог}} = \left| \arccos \left(\frac{n}{\sin \psi_0} \right) \right| \quad (14)$$

уравнение (13 6) принимает вид

$$z = r \frac{n}{1-n^2} \sqrt{\sin^2 \psi - n^2} + \frac{1}{2 \Phi k_1 l} \ln \left| \frac{(l^2 - 1) (\sin^2 \psi - n^2)}{\cos^2 \psi (l^2 - 1) + (1 - n^2)} \right| + \text{const.}$$

Конкретное значение константы определяет конкретный луч плоской нормальной волны. Выражения (13) записаны для случая $l > 1$. В случае $l < 1$ для углов $\vartheta_0 > \vartheta_{\text{ог}}$ появляются некоторые отличия, связанные с существованием угла Брюстера, что мы не рассматриваем здесь.

Из уравнений траекторий лучей и из рис. 2 видно, что плоская нормальная волна, вышедшая под углом $-\vartheta_{\text{ог}} \leq \vartheta_0 \leq 0$ или $-\pi \leq \vartheta_0 \leq -\pi + \vartheta_{\text{ог}}$, полностью рефрагирует в сторону $r = \infty$, нигде не выходя из волноводной зоны, а нормальная волна, вышедшая под углом $-\pi + \vartheta_{\text{ог}} < \vartheta_0 < \vartheta_{\text{ог}}$, пересекает границу между волноводной и неволноводной зонами (линию выхода $r = r_m$) и уходит в неволноводную зону клина, где она преломляется в полупространство, лишь частично отражаясь в волноводную зону клина. Это явление выхода нормальной волны из клина в полупространство было специально рассмотрено нами в работах [1, 6] и здесь не рассматривается.

Значения фазы прямой ($k_1 \eta_-$) и отраженной ($k_1 \eta_+$) волн в формуле (12) определяются выражением

$$\begin{aligned} \eta_{\mp} = & (r + z) \sin \psi_0 \cos \vartheta_0 - \frac{m\pi}{\Phi k_1} \arcsin \left(\frac{t \sin \psi_0 \cos \vartheta_0}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0}} \right) - \\ & - r_0 t_0 \sin \psi_0 \cos \vartheta_0 + \frac{m\pi}{\Phi k_1} \arcsin \left(\frac{t_0 \sin \psi_0 \cos \vartheta_0}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0}} \right) + \\ & + \frac{\sin \psi_0 \cos \vartheta_0}{\Phi k_1} \int_{t_0}^t \arctg \left[\frac{l \sqrt{1 - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0 (1 + t^2)}}{\sqrt{(1 + t^2) \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0 - n^2}} \right] \times \\ & \times \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0 (1 + t^2)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Интеграл в этом выражении, представляющий небольшую добавку, находится численными методами. Через t здесь обозначен новый параметр, связанный с параметром ψ следующей формулой

$$t = \frac{\pm \sqrt{\sin^2 \psi - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0}}{\sin \psi_0 \cos \vartheta_0}. \quad (16)$$

Параметр t имеет смысл тангенса угла между касательной к лучу в данной точке и направлением оси z . Через t_0 обозначено значение t в источнике $r=r_0$, т. е. $t_0 = \operatorname{tg} \theta_0$. Координаты r и z в формуле (15) выражаются через параметр ψ по формулам (13). Коэффициент отражения $v(\theta_0)$ в формуле (12) для рефрагированной волны равен $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ и учитывает так называемый скачок фазы на каустике $t=0$. Каустика в данном случае плоской нормальной волны является и линией точек поворота лучей. Она определяется формулой

$$r_{\text{пов}} = \frac{1}{k_1 \Phi \sqrt{1 - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \theta_0}} \left\{ m\pi - \arctg \left[l \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \theta_0}}{\sqrt{\sin^2 \psi_0 \cos^2 \theta_0 - n^2}} \right] \right\}.$$

Коэффициент отражения $v(\theta_0) = |v| e^{i\theta}$ отраженной от неволноводной зоны волны мал по модулю [1], так что в большинстве случаев такой отраженной волной можно пренебречь.

Подставляя решение для плоской нормальной волны (12) в интеграл (9), получим интегральное выражение для поля нормальной волны, расходящейся из точечного источника,

$$W_m = W_0 r^{-1/2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[e^{ik_1 \eta_-(\zeta)} + v(\zeta) e^{ik_1 \eta_+(\zeta)}] d\zeta}{\sqrt{k_1^2 r_0^2 (1 - \sin^2 \psi_0 \zeta^2) - \mu_1^2(r_0)} \sqrt{k_1^2 r^2 (1 - \sin^2 \psi_0 \zeta^2) - \mu_1^2(r)}}. \quad (17)$$

Здесь через W_0 обозначен постоянный множитель, учитывающий мощность источника, а $\eta_{\pm}(\zeta)$ получается из выражения (15) подстановкой $\cos \theta_0 = \zeta$. Из бесконечных пределов интегрирования (17) следует, что поле расходящейся из точечного источника нормальной волны представляется суперпозицией плоских нормальных волн, распространяющихся не только под действительными, но и комплексными углами $\arg \cos \zeta$.

Интеграл (17) вычисляется методом перевала. Путем стандартных операций для решения получаем

$$W_m = W_0 \times \sum \frac{r^{-1/2} \sqrt{2\pi/|\eta_-^*(\zeta_{0j})|} e^{ik_1 \eta_-(\zeta_{0j})}}{\sqrt{k_1^2 r_0^2 (1 - \zeta_{0j}^2 \sin^2 \psi_0) - \mu_1^2(r_0)} \sqrt{k_1^2 r^2 (1 - \zeta_{0j}^2 \sin^2 \psi_0) - \mu_1^2(r)}} + \\ + W_0 \sum \frac{r^{-1/2} v(\zeta_{0j}) \sqrt{\frac{2\pi}{|\eta_+^*(\zeta_{0j})|}} e^{ik_1 \eta_+(\zeta_{0j})}}{\sqrt{k_1^2 r_0^2 (1 - \zeta_{0j}^2 \sin^2 \psi_0) - \mu_1^2(r_0)} \sqrt{k_1^2 r^2 (1 - \zeta_{0j}^2 \sin^2 \psi_0) - \mu_1^2(r)}}, \quad (18)$$

где суммирование ведется по перевальным точкам.

Перевальные точки ζ_{0j} определяются условиями

$$\eta'|_{\zeta=\zeta_{0j}} = \frac{\partial \eta_-}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_{0j}} = 0, \quad \frac{\partial (\eta_+ + \beta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_{0j}} = 0. \quad (19)$$

Определив из этих условий ζ_{0j} как функции координат r , z и параметра ψ (или t), можно убедиться, что перевальными точками ξ_0 являются ко-

синусы углов выхода ϑ_0 лучей нормальной волны из точечного источника, изображенных на рис. 3, а уравнения (19) являются уравнениями траекторий этих лучей.

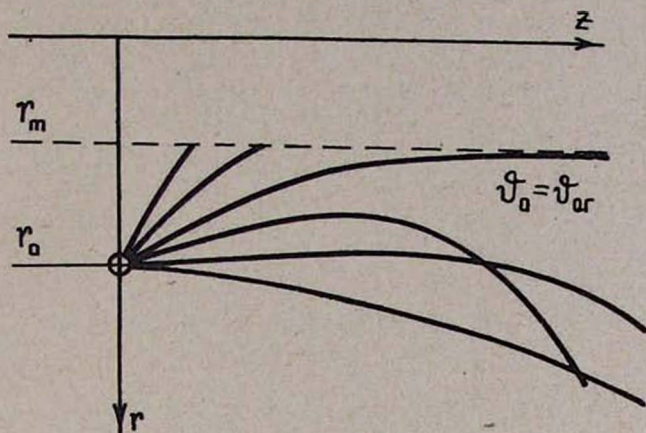


Рис. 3.

Для прямой волны и волны рефрагированной параметрическая система уравнений траекторий лучей имеет вид

$$r = \frac{1}{\Phi k_1 \cos \psi} \left\{ m\pi - \arctg \left(l \frac{\cos \psi}{\sqrt{\sin^2 \psi - n^2}} \right) \right\}, \quad (20a)$$

$$z = \frac{\sin^2 \psi_0 \cos \vartheta_0}{1 - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0} \left\{ \pm r \sqrt{\sin^2 \psi - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0} - r_0 \sin \psi_0 \sin \vartheta_0 + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1-n^2} \operatorname{arth}}{\Phi k_1 \sqrt{\alpha}} \operatorname{arth} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{l \sqrt{\alpha} \sqrt{1-n^2} [\pm \sqrt{\sin^2 \psi - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0} (\sin^2 \psi_0 - n^2) - \sin \psi_0 \sin \vartheta_0 \sqrt{\sin^2 \psi - n^2}]}{\alpha \sqrt{(\sin^2 \psi - n^2)(\sin^2 \psi_0 - n^2)} \mp l^2 (1-n^2) \sin \psi_0 \sin \vartheta_0 \sqrt{\sin^2 \psi - \sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0}} \right] \right\}. \quad (20b)$$

Для углов выхода $\sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0 > n^2$ берется arth , для углов $\sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0 < n^2$ берется arcth , а для случая $\sin^2 \psi_0 \cos^2 \vartheta_0 = n^2$ уравнение (20b) принимает вид

$$z = \frac{n}{1-n^2} \left\{ \pm r \sqrt{\sin^2 \psi - n^2} \mp r_0 \sqrt{\sin^2 \psi_0 - n^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2 k_1 \Phi l} \left[\ln \left| \frac{(\sin^2 \psi - n^2)(l^2 - 1)}{(l^2 - n^2) - (l^2 - 1) \sin^2 \psi} \right| - \ln \left| \frac{(\sin^2 \psi_0 - n^2)(l^2 - 1)}{(l^2 - n^2) - (l^2 - 1) \sin^2 \psi_0} \right| \right] \right\}.$$

Для волны, отраженной от неволноводной зоны, в уравнение (20a) входит еще член, зависящий от ϑ_0 , который получается в результате дифференцирования $\frac{\partial \beta}{\partial \zeta}$. Поскольку в большинстве случаев отраженной от неволноводной зоны частью волны можно пренебречь, мы не приводим

его здесь в явном виде. Из анализа лучевой картины можно убедиться, что и в случае расходящейся из точечного источника нормальной волны поле представляется в виде двух волн—прямой и отраженной, соответствующих двум перевальным точкам ξ_{01} и ξ_{02} . Третья перевальная точка, появляющаяся в периферийной области, представляет собой очень слабую волну, возникающую за счет «расщепления» граничных лучей

$$\vartheta_0 = -\arccos\left(\frac{n}{\sin\psi_0}\right) \quad \text{и} \quad \vartheta_0 = -\pi + \arccos\left(\frac{n}{\sin\psi_0}\right).$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} W_m = W_- + W_+ = & \frac{W_0 \sqrt{2\pi} e^{i[k_1 \eta(\vartheta_{01}) - \pi/4]}}{\sqrt{|\eta''(\cos\vartheta_{01})|} \sqrt{k_1^2 r_0^2 (1 - \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_{01}) - \mu_1^2(r_0)}} \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{k_1^2 r^2 ((1 - \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_{01}) - \mu_1^2(r))}} + \\ & + \frac{W_0 \sqrt{2\pi} v(\vartheta_{02}) e^{i[k_1 \eta(\vartheta_{02}) - \pi/4]}}{\sqrt{|\eta''(\cos\vartheta_{02})|} \sqrt{k_1^2 r_0^2 (1 - \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_{02}) - \mu_1^2(r_0)}} \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{k_1^2 r^2 (1 - \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_{02}) - \mu_1^2(r)}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \eta(\vartheta_0) = & \sin\psi_0 \cos\vartheta_0 (z + tr - t_0 r_0) - \\ & - \frac{m\pi}{\Phi k_1} \left[\arcsin\left(\frac{t \sin\psi_0 \cos\vartheta_0}{\sqrt{1 - \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0}}\right) - \arcsin\left(\frac{t_0 \sin\psi_0 \cos\vartheta_0}{\sqrt{1 - \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0}}\right) \right] + \\ & + \frac{\sin\psi_0 \cos\vartheta_0}{\Phi k_1} \int_{t_0}^t \operatorname{arctg} \left[\frac{l \sqrt{1 - \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0 (1 + t^2)}}{\sqrt{(1 + t^2) \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0 - n^2}} \right] \times \\ & \times \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0 (1 + t^2)}}, \quad (22) \\ \eta''(\cos\vartheta_0) = & \frac{1}{t t_0 (1 - \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0)^4} \times \\ & \times [r_0 t \{t_0^2 - [1 - (1 + t^2) \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0]\} - r t_0 \{t^2 - [1 - (1 + \\ & + t^2) \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0]\} \sin\psi_0 \cos\vartheta_0] - \\ & - \frac{1}{t t_0 \Phi k_1 \alpha (\cos^2\vartheta_0 \sin^2\psi_0 - n^2) (1 - \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0)} \times \\ & \times [l(1 - n^2) \sin^3\psi_0 \cos^3\vartheta_0 [t \sqrt{(1 + t_0^2) \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0 - n^2} - \\ & - t_0 \sqrt{(1 + t^2) \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0 - n^2}]] - \\ & - \frac{\sqrt{1 - n^2} \sin\psi_0 [2(1 - l^2) \sin^4\psi_0 \cos^4\vartheta_0 + (l^2 - n^2)(1 + \sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0)]}{\Phi k_1 \alpha^{3/2} (\sin^2\psi_0 \cos^2\vartheta_0 - 1)^4} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{\operatorname{arth}}{\operatorname{arcth}} \left\{ l \sqrt{1-n^2} \sqrt{a \sin \psi_0 \cos \theta_0 [t \sqrt{(1+t_0^2) \sin^2 \psi_0 \cos^2 \theta_0 - n^2} - \right. \\ \left. - t_0 \sqrt{(1+t^2) \sin^2 \psi_0 \cos^2 \theta_0 - n^2}] [a \sqrt{\sin^2 \psi_0 \cos^2 \theta_0 (1+t^2) - n^2} \times (23) \right. \\ \left. \times \sqrt{\sin^2 \psi_0 \cos^2 \theta_0 (1+t_0^2) - n^2} - l^2 (1-n^2) t t_0 \sin^2 \psi_0 \cos^2 \theta_0]^{-1} \right\}.$$

Как и прежде, arth и arcth берутся в зависимости от промежутка значений, в котором лежит $\cos \theta_0$. Координаты r и z определяются через параметр ψ и угол θ_0 уравнениями (20), а $\mu(r)$ — уравнениями (10). Выражения (21)–(23) с точностью до постоянного множителя W_0 , определяемого условиями в точке источника, представляют собой в параметрической форме ВКБ-решение для нормальной волны, расходящейся из точечного источника, в клине, лежащем на полупространстве. Оно эквивалентно приближению геометрической оптики и не применимо на каустиках, которые определяются системой уравнений

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right|_{\zeta_k} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} \right|_{\zeta_k} = 0.$$

Поле на каустиках рассчитывается методом Бреховских [5]. Мы не приводим этот расчет из-за большой громоздкости выкладок.

Выражаю искреннюю благодарность профессору Р. В. Хохлову за полезные дискуссии.

Московский государственный
университет

Поступила 8.IX.1972

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. К. Кузнецов. Вестник МГУ, серия физ., астроном., № 3, 293 (1972).
2. В. К. Кузнецов. Акуст. ж., 5, 170 (1959).
3. В. К. Кузнецов. Акуст. ж., 13, 221 (1967).
4. В. К. Кузнецов. Вестник МГУ, серия физ., астроном., № 3, 14 (1967).
5. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах, М., 1957.
6. В. К. Кузнецов, В. Ж. Низамов. Труды VI Всесоюзной акустической конференции (А-IV-6), М., 1968.

ԿԵՏԱՅԻՆ ԱՂՐՅՈՒՐԻ ԶԱՅՆԱՅԻՆ ԴԱՇՏԸ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ
ՊԱՌԿԱԾ ՍԵՓԻ ՄԵՋ

Վ. Կ. ԿՈՒՆԵՏՈՎ

Վեր — մոտավորութիւնը ստացւած է կիսատարածութեան վրա պարզած սեփի մեջ որդ-
ման խնդրի լուծումը: Դիտարկւած է նաև հեղուկ միջավայրի դեպքը:

SOUND FIELD OF THE POINT SOURCE IN A WEDGE LYING ON THE HEMISPHERE

V. K. KUZNETSOV

A description is given of the sound field of a point source in a wedge lying on the hemisphere. The case of liquid medium is considered. WKB solution of the problem is given.