

О КОЛЕБАНИИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОЙ СФЕРЫ
ПРИ НАЛИЧИИ ТОРОИДАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Р. С. ОГАНЕСЯН, М. Г. АБРАМЯН

В работе рассмотрен вопрос об устойчивости вращающейся жидкой сферы при наличии тороидального магнитного поля по отношению к поверхностным возмущениям типа $m = n = 2$.

Найдена частота колебания как функция магнитного поля и установлено, что сфера устойчива по отношению к рассматриваемым возмущениям.

В работе [1] нами было показано, что при наличии тороидального магнитного поля типа [2]

$$B_{\varphi}(r, \vartheta) = \gamma r \sin \vartheta = B_0 \left(\frac{r}{R} \right) \sin \vartheta \quad (1)$$

($B_0 = \gamma R$ — магнитное поле на экваторе) может существовать стационарно-вращающаяся фигура равновесия несжимаемой проводящей жидкости в виде сферы, если только выполняется условие

$$B_0 = \omega R \sqrt{2\pi\rho}. \quad (2)$$

Заметим, что это условие можно записать в несколько ином виде, а именно,

$$v = \sqrt{2} v_A,$$

где $v = \omega R$ есть линейная скорость вращения экватора, а $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$ — скорость альвеновских волн, соответствующих магнитному полю на экваторе.

Рассмотрим теперь вопрос о малых колебаниях этой сферы по отношению к поверхностным возмущениям типа $m = n = 2$.

В присутствии магнитного поля (1) уравнение равновесия в общем виде есть [1]

$$\frac{p}{\rho} - V(x, y, z) - \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{B_0^2}{4\pi\rho R^2} \right) (x^2 + y^2) = \text{const}, \quad (3)$$

где предполагается, что вращение происходит вокруг оси z .

Имея в виду условие (2) и выражение для потенциала

$$V(x, y, z) = 2\pi G\rho R^2 - \frac{2}{3} \pi G\rho (x^2 + y^2 + z^2),$$

из уравнения (3) с учетом равенства нулю гидростатического давления на свободной поверхности фигуры находим

$$p = \frac{2}{3} \pi G\rho^2 (R^2 - x^2 - y^2 - z^2). \quad (4)$$

Характер малых колебаний вокруг равновесного состояния фигуры можно определить из уравнения движения

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2[\vec{\omega} \vec{u}] = -\text{grad } \Pi_1 - \frac{1}{4\pi\rho} [\vec{B} \text{ rot } \vec{B}], \quad (5)$$

где

$$\Pi_1 = \frac{p}{\rho} - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + V(x, y, z),$$

и граничного условия на свободной возмущенной поверхности S

$$[p]_s = 0. \quad (6)$$

Поле скоростей $\vec{u}$ удовлетворяет условию несжимаемости и кроме этого делается предположение о его соленоидальности.

Параметры возмущенной конфигурации представим в виде

$$p = p_e + \delta p, \quad V = V_e + \delta V, \quad \vec{B} = \vec{B}_e + \delta \vec{B}, \quad (7)$$

где индекс „e“ относится к равновесным значениям соответствующих параметров.

Введя вектор смещения

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}, \quad \vec{\xi} = \text{grad } \psi, \quad (\Delta^2 \psi = 0),$$

легко доказать [3, 4], что при деформациях типа $m = n = 2$ имеет место

$$[\vec{B} \text{ rot } \vec{B}] = \text{grad} \left\{ B_e^2 - \vec{\xi} \text{ grad } \frac{B_e^2}{2} \right\}. \quad (8)$$

Тогда уравнение движения (5) и граничное условие (6) можно привести к виду [6, 3, 4]

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2[\vec{\omega} \vec{u}] = -\text{grad } \Pi, \quad (9)$$

$$[\Phi + \rho \Pi]_{s_e} = 0, \quad (10)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \rho \Pi &= \delta p - \rho \delta V - \vec{\xi} \text{ grad } \frac{B_e^2}{8\pi}, \\ \Phi &= \rho \delta V + \vec{\xi} \text{ grad } \left\{ p_e + \frac{B_e^2}{8\pi} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, нам необходимо вычислить значения Φ и Π на поверхности равновесной фигуры (S_e). Для компонент $\vec{\xi}$ при $m = n = 2$ имеем

$$[\xi_r]_{s_e} = K_{22} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}, \quad [\xi_\theta]_{s_e} = H_{22} P_2^1(\mu) e^{2i\varphi}, \quad (12)$$

где

$$K_{22} = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi [\xi_r]_{S_e} e^{-2i\varphi} \sin\vartheta d\vartheta, \quad (13)$$

$$H_{22} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi [\xi_\theta]_{S_e} e^{-2i\varphi} \cos\vartheta d\vartheta.$$

Гравитационный эффект отклонений (12) можно представить как увеличение на $\rho [\xi_r]_{S_e}$ плотности поверхностного распределения массы относительно невозмущенной поверхности S_e . При этом для изменения гравитационного потенциала (как общее решение уравнения Лапласа) находим

$$\delta V = \begin{cases} c_{22} \frac{r^2}{R^2} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}, & r \leq R, \\ c_{22} \frac{R^3}{r^3} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}, & r \geq R. \end{cases} \quad (14)$$

В отличие от работы [4] в решения этой задачи входят простые сферические функции вместо сфероидальных [9].

Используя граничное условие [5–7]

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \delta V \right]_{r=R+0} - \left[\frac{\partial}{\partial r} \delta V \right]_{r=R-0} = -4\pi G\rho [\xi_r]_{r=R},$$

для c_{22} получаем значение

$$c_{22} = \frac{4}{5} \pi G\rho R K_{22},$$

следовательно,

$$[\rho \delta V]_{S_e} = \frac{4}{5} \pi G\rho^2 R K_{22} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}. \quad (15)$$

Далее, имея в виду (1), (4) и (12), находим:

$$\{\vec{\xi} \text{ grad } p_e\}_{S_e} = -\frac{4}{3} \pi G\rho^2 R K_{22} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}, \quad (16)$$

$$\left\{ \vec{\xi} \text{ grad } \frac{B_e^2}{8\pi} \right\}_{S_e} = \frac{B_0^2}{4\pi R} \left[\sin^2\vartheta + \frac{H_{22}}{K_{22}} \cos^2\vartheta \right] K_{22} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}. \quad (17)$$

Складывая (15), (16) и (17), получаем искомое значение для $[\Phi]_{S_e}$.

Представляя скорость возмущений в виде $u(\vec{x}, t) = u(\vec{x}) \times \exp\{st\}$, по аналогии с работой [4] для функций $[\Pi]_{S_e}$, $[\xi_r]_{S_e}$ и $[\xi_\theta]_{S_e}$, получаем соответственно

$$[\Pi]_{S_e} = \frac{hR^3}{3} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}, \quad (18)$$

$$[\xi_r]_{s_e} = -\frac{2hR \sin^2 \vartheta}{s(s-2i\omega)} e^{2i\varphi}, \quad [\xi_\theta]_{s_e} = -\frac{2hR \sin \vartheta \cos \vartheta}{s(s-2i\omega)} e^{2i\varphi}.$$

Подставляя компоненты $\vec{\xi}$ в (13) и произведя интегрирование, получаем значения неизвестных коэффициентов

$$K_{22} = H_{22} = -\frac{2hR}{3s(s-2i\omega)}. \quad (19)$$

В результате выражение (17) примет вид

$$\left[\vec{\xi} \operatorname{grad} \frac{B_e^2}{8\pi} \right]_{s_e} = \frac{B_0^2}{4\pi R} K_{22} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}. \quad (20)$$

С учетом (15), (16) и (18)–(20) граничное условие (10) можно записать в следующем виде:

$$s(s-2i\omega) + 2\pi G_p \left\{ \frac{8}{15} - \frac{B_0^2}{4\pi^2 G_p^2 R^2} \right\} = 0,$$

откуда получаем частоту поверхностных колебаний вращающейся сферы при наличии магнитного поля (1) с учетом (2)

$$s_{1,2} = i \left\{ \frac{B_0}{R \sqrt{2\pi\rho}} \pm \sqrt{\frac{16}{15} \pi G_p} \right\}. \quad (21)$$

Таким образом, вращающаяся проводящая жидкая сфера при наличии тороидального магнитного поля типа (1) устойчива по отношению к рассматриваемым поверхностным возмущениям. Как следует из (21), частота этих колебаний увеличивается с ростом магнитного поля. При $B_0 = 0$ ($\omega = 0$) формула (21) переходит в известную формулу Кельвина [8, 9] для частоты невращающейся жидкой сферы (магнитное поле отсутствует) при $n = m = 2$.

Ереванский государственный университет

Поступила 27.IX.1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян. Астрон. ж., 50, 3 (1973).
2. I. W. Roxburgh, B. R. Durney. M.N.R.A.S., 135, 329 (1967).
3. Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян. Астрофизика, 8, 525 (1972).
4. Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян. Изв. АН АрмССР, Физика, 7, 449 (1972).
5. А. А. Власов. ЖЭТФ, 27, 224 (1954).
6. Р. С. Оганесян. Астрон. ж., 53, 928 (1956).
7. P. H. Roberts, Stewartson. Ap. J., 137, 777 (1963).
8. N. R. Lebovitz. Ap. J., 134, 500 (1961).
9. R. A. Lyttleton. The Stability of Rotating Liquid Masses, Cambridge, 1953.

ՊՏՏՎՈՂ ՀԵՂՈՒԿ ԳԵՂԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԹՈՐՈՒԴԱԼ
ՄԱԳՆԵՒՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ռ. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Մ. Գ. ԱՌԲԱՀԱՄՅԱՆ

Դիտարկված է պտտվող հեղուկ գազի կայունությունը՝ $m=n=2$ մակերևութային զեր-
գրությունների նկատմամբ, թորոիդալ մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում:

Դտնված է տատանման հաճախությունը՝ որպես ֆունկցիա մագնիսական դաշտից և
ցույց է տրված, որ գունդը դիտարկված զրգրումների նկատմամբ կայուն է:

ON THE OSCILLATION OF ROTATING LIQUID SPHERE
IN THE PRESENCE OF TOROIDAL MAGNETIC FIELD

R. S. OGANESEAN, M. G. ABRAHAMIAN

The stability of rotating liquid sphere in the presence of toroidal magnetic field
with regard to surface perturbations of the type $n = m = 2$ is considered.

The frequency of the oscillation as a function of the magnetic field has been
found and it has been established that the sphere is stable with regard to the pertur-
bations considered.