

К МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРОИДОВ МАКЛОРЕНА

Р. С. ОГАНЕСЯН, М. Г. АБРАМЯН

В работе рассмотрен вопрос об устойчивости сфероидов Маклорена при наличии тороидального магнитного поля. Устойчивость рассмотрена по отношению к малым поверхностным возмущениям типа $n = m = 2$, которые являются определяющими в теории жидких фигур [1, 2]. Установлено, что магнитное поле ($B_0 < B_c = \omega a \sqrt{2\pi\rho}$) не меняет критерия устойчивости сплюснутых сфероидов, а лишь изменяет частоту колебаний.

Хорошо известно, что сжатые эллипсоиды вращения (сфероиды Маклорена) самогравитирующей несжимаемой массы являются фигурами равновесия. Их устойчивость по отношению к малым поверхностным возмущениям детально рассмотрена в ряде работ [1, 2], в которых установлено, что устойчивыми являются только те фигуры, у которых эксцентриситет (e) меридианного сечения меньше 0,9529.

В настоящей работе рассматривается вопрос об устойчивости этих фигур при наличии магнитного поля, структура которого при твердотельном и стационарном вращении определяется уравнением [3],

$$\operatorname{rot} \left\{ \frac{\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B}}{\rho} \right\} = 0. \quad (1)$$

Предполагая, что магнитное поле имеет тороидальный характер, $\vec{B} = (0, 0, B(r, \vartheta))$, из (1), в частности, получим

$$B(r, \vartheta) = \gamma r \sin \vartheta, \quad \text{или} \quad B(r, \vartheta) = B_0 \left(\frac{r}{a} \right) \sin \vartheta, \quad (2)$$

где $B_0 = \gamma a$ представляет собой индукцию магнитного поля на экваторе.

В присутствии магнитного поля типа (2) уравнение равновесия имеет вид [3]

$$\frac{p}{\rho} - V - \left(\frac{\omega^2}{2} - \rho \frac{\gamma^2}{4\pi} \right) (x^2 + y^2) = \text{const.} \quad (3)$$

Предполагается, что вращение происходит вокруг оси z , а начало координат находится в центре конфигурации.

Уравнение поверхности сфероида (S_e) представляется в виде ($a = b > c$)

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4)$$

Рассмотрение вопроса равновесия и устойчивости конфигурации намного упрощается введением сплюснутых сфероидальных координат ($\zeta, \vartheta, \varphi$)

$$\begin{aligned}x &= k(1 + \zeta^2)^{1/2} \sin \vartheta \cos \varphi, \\y &= k(1 + \zeta^2)^{1/2} \sin \vartheta \sin \varphi, \\z &= k\zeta \cos \vartheta,\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$k^2 = a^2 - c^2 = a^2 e^2, \quad E = \frac{c}{k} = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e}. \quad (6)$$

При $e \rightarrow 0$ сфероид превращается в сферу, а при $e \rightarrow 1$ — в бесконечный диск.

Коэффициенты Ламе координатных преобразований (5) имеют вид

$$h_\zeta^2 = k^2 \frac{\zeta^2 + \mu^2}{1 + \zeta^2}, \quad h_\vartheta^2 = k^2 (\zeta^2 + \mu^2), \quad h_\varphi^2 = k^2 (1 + \zeta^2) (1 - \mu^2),$$

где $\mu = \cos \vartheta$. Поверхности $\zeta = \text{const}$ составляют семейство софокусных сжатых сфероидов. При этом поверхность (3) в системе координат (5) имеет простой вид

$$\zeta = E. \quad (7)$$

В дальнейшем для исследования устойчивости необходимо условие равновесия выразить через параметр e .

Учитывая, что потенциал внутри сфероида имеет вид

$$\frac{V(x, y, z)}{\pi G \rho a^2 c} = \text{const} - A_1(x^2 + y^2) - A_3 z^2, \quad (8)$$

где при $a > c$

$$\begin{aligned}A_1 &= \int_0^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)^2 (c^2 + u)^{1/2}} = \frac{1}{k^3} [\arcsin e - e(1 - e^2)^{1/2}], \\A_3 &= \int_0^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)(c^2 + u)^{3/2}} = \frac{2}{k^3} [e(1 - e^2)^{-1/2} - \arcsin e],\end{aligned}\quad (9)$$

условие равновесия (3) можно переписать

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \pi G \rho a^2 c \left[\left(A_1 - \frac{\omega^2}{2\pi G \rho a^2 c} + \frac{\gamma^2}{4\pi^2 G a^2 c} \right) (x^2 + y^2) + A_3 z^2 \right].$$

Так как на поверхности (4) $p = 0$, то p можно представить в следующем виде

$$p = \pi G \rho^2 a^2 c^3 A_3 \left[1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \right]. \quad (10)$$

При этом мы предполагаем, что

$$a^2 \left(A_1 - \frac{\omega^2}{2\pi G \rho a^2 c} + \frac{\gamma^2}{4\pi^2 G a^2 c} \right) = c^2 A_3, \quad (11)$$

откуда, имея в виду (9), получим

$$\omega^2 - \frac{B_0^2}{2\pi\rho a^2} = \frac{2\pi G\rho}{e^3} (1 - e^2)^{1/2} [(3 - 2e^2) \arcsin e - 3e(1 - e^2)^{1/2}]. \quad (12)$$

Правая часть (12) при $1 \gg e \gg 0$ есть величина положительная. Следовательно, сжатым сфероидом (эллипсоидом Маклорена) соответствует случай, когда центробежные силы превосходят силы магнитного давления. Этот результат нами был получен в работе [3].

Приступим к исследованию устойчивости этих фигур. Допустим, что равновесное состояние конфигурации подвергается бесконечно малым поверхностным возмущениям, причем скорость возмущений должна удовлетворять условию несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (13)$$

Допустим также, что поле скоростей является соленоидальным

$$\operatorname{rot} \vec{u} = 0. \quad (14)$$

И, наконец, скорость должна удовлетворять уравнению движения

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} = -\vec{\nabla} \Pi_1 - \frac{1}{4\pi\rho} [\vec{B} \operatorname{rot} \vec{B}], \quad (15)$$

где

$$\Pi_1 = \frac{p}{\rho} - V - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2).$$

На возмущенной поверхности S гидростатическое давление должно обращаться в нуль

$$[p]_s = 0. \quad (16)$$

Это есть граничное условие задачи, дающее возможность определить частоту колебаний. Условие (16) удобно записать на невозмущенной поверхности S_e . С этой целью представим

$$p = p_e + \delta p, \quad V = V_e + \delta V, \quad \vec{B} = \vec{B}_e + \delta \vec{B}, \quad (17)$$

где индекс „e“ указывает на значения параметров в равновесной конфигурации.

Введем также вектор отклонения частиц жидкости от равновесного положения $\vec{x}$ в момент времени $t - \vec{\xi}(\vec{x}, t)$, причем в линейном приближении

$$\vec{u} \approx \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}.$$

Тогда условие (16) на поверхности S примет следующий вид:

$$[p]_s = [p_e]_s + [\delta p]_s = [p_e + \vec{\xi} \operatorname{grad} p_e]_s + [\delta p]_s = [\vec{\xi} \operatorname{grad} p_e + \delta p]_s = 0, \quad (18)$$

где мы учли условие $[p_e]_s = 0$. Запишем условие (18) в виде, удобном для расчетов. С этой целью преобразуем магнитный член в уравнении (15). Имея в виду условие (14), можно представить

$$\vec{\xi} = \text{grad } \psi, \quad (19)$$

откуда, с учетом (13), для функции ψ получаем уравнение Лапласа

$$\text{div grad } \psi = 0. \quad (20)$$

Из решений (20) нас будет интересовать только гармоника с $m = n = 2$. При этом легко доказать, что

$$\begin{aligned} [\vec{B} \text{ rot } \vec{B}] &= [\vec{B}_e \text{ rot } \vec{B}_e] + [\vec{B}_e \text{ rot } \delta \vec{B}] + [\delta \vec{B} \text{ rot } \vec{B}_e] = \\ &= \text{grad} \left\{ B_e^2 - \vec{\xi} \text{ grad } \frac{B_e^2}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

При преобразовании (21) мы воспользовались соотношениями (13), (14), (17), (2) и тем, что

$$\delta \vec{B} = \text{rot} [\vec{\xi} \vec{B}_e] + (\vec{\xi} \nabla) \vec{B}_e = -(\vec{B}_e \nabla) \vec{\xi}. \quad (22)$$

Тогда с учетом (21) уравнение (15) можно представить в виде

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2 \vec{\omega} \times \vec{u} = -\vec{\nabla} \Pi, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_1 + \frac{B_e^2}{4\pi\rho} - \vec{\xi} \text{ grad } \frac{B_e^2}{8\pi\rho} = \\ &= \frac{p_e}{\rho} - V_e - \left(\frac{1}{2} \omega^2 - \rho \frac{\gamma^2}{4\pi} \right) (x^2 + y^2) + \frac{\delta p}{\rho} - \delta V = \\ &= \text{const} + \frac{1}{\rho} \left[\delta p - \rho \delta V - \vec{\xi} \text{ grad } \frac{B_e^2}{8\pi} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь мы учли (17) и (3).

Теперь граничное условие (18) можно представить в виде

$$[\Phi + \rho \Pi]_{S_e} = 0, \quad (25)$$

где введено обозначение

$$\Phi = \rho \delta V + \vec{\xi} \text{ grad } p_e + \vec{\xi} \text{ grad } \frac{B_e^2}{8\pi}. \quad (26)$$

Функция Φ имеет простое физическое истолкование, а именно, $\int \Phi d\vec{x}$ есть работа, необходимая для квазистатических $\vec{\xi}$ деформаций поверхности конфигурации.

Далее, нам необходимо вычислить значения Φ и Π на поверхности равновесной конфигурации.

Решение уравнения (20) в координатной системе (5) имеет следующий вид [4]:

$$\psi(\zeta, \vartheta, \varphi) \sim P_n^m(i\zeta) P_n^m(\mu) e^{im\varphi}, \quad (27)$$

откуда с помощью (19) при $n = m = 2$ получаем

$$[\xi_{\zeta}]_{S_e} = \frac{K_{2,2}}{h_{\zeta}} \cdot P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}, \quad (28)$$

$$[\xi_{\vartheta}]_{S_e} = \frac{R_{2,2}}{h_{\vartheta}} \cdot P_2^1(\mu) e^{2i\varphi}, \quad (29)$$

где постоянные $K_{2,2}$ и $R_{2,2}$ выражаются интегралами

$$K_{2,2} = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} [h_{\zeta} \xi_{\zeta}]_{S_e} e^{-2i\varphi} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (30)$$

$$R_{2,2} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} [h_{\vartheta} \xi_{\vartheta}]_{S_e} \cdot e^{-2i\varphi} \cos \vartheta d\vartheta. \quad (31)$$

Гравитационный эффект этих отклонений можно представить как увеличение на $\rho[\xi_{\zeta}]_{S_e}$ плотности поверхностного распределения массы S_e поверхности. Изменение гравитационного потенциала, обусловленное этим эффектом, является общим решением уравнения Лапласа и, следовательно, имеет вид [4]

$$\delta V = \begin{cases} c_{2,2} \frac{Q_2^1(i\zeta)}{Q_2^1(iE)} P_2^1(\mu) e^{2i\varphi}, & \zeta \geq E \\ c_{2,2} \frac{P_2^1(i\zeta)}{P_2^1(iE)} P_2^1(\mu) e^{2i\varphi}, & \zeta \leq E. \end{cases} \quad (32)$$

Вронскиан присоединенных функций Лежандра комплексного аргумента есть

$$P_n^m(x) \frac{dQ_n^m}{dx} - Q_n^m(x) \frac{dP_n^m}{dx} = \frac{(-1)^m (n+m)!}{(n-m)!} \cdot \frac{1}{1-x^2}. \quad (33)$$

Для определения коэффициентов $c_{2,2}$ применим теорему Гаусса к массе, распределенной в элементарном объеме поверхности S_e [1],

$$\left[\frac{1}{h_{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \delta V \right]_{\zeta=E+0} - \left[\frac{1}{h_{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \delta V \right]_{\zeta=E-0} = -4\pi G \rho [\xi_{\zeta}]_{\zeta=E}. \quad (34)$$

Подставляя сюда выражения (28) и (32) соответственно для величин $[\xi_{\zeta}]_{S_e}$ и δV и используя соотношение (33), для $c_{2,2}$ получим

$$c_{2,2} = \frac{i\pi\rho}{8e^2} K_{2,2} P_2^1(iE) Q_2^1(iE),$$

откуда, имея в виду, что

$$P_2^1(iE) = -3(1+E^2) = -\frac{3}{e^2},$$

$$\begin{aligned} Q_2^1(iE) &= i \left[3(1+E^2) \operatorname{arccot} E - \frac{5E+3E^3}{1+E^2} \right] = \\ &= i \left[\frac{3}{e} \arcsin e - \frac{3+2e^2}{e} (1-e^2)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

получаем

$$[\rho \delta V]_{s_e} = \frac{3\pi p^2}{8e^5} \left[\frac{3}{e} \arcsin e - (3 + 2e^2)(1 - e^2)^{1/2} \right] K_{2,2} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}. \quad (35)$$

Пользуясь формулой (10), легко получить

$$\text{grad } p_e = -\frac{2\pi G p^2}{e^2} a^2 (1 - e^2) A_3 h e_\zeta,$$

где e_ζ есть единичный вектор в направлении увеличения ζ . Следовательно, имея в виду (28), получим

$$[\vec{\xi} \text{ grad } p_e]_{s_e} = -\frac{2\pi G p^2}{e} a^2 (1 - e^2) A_3 K_{2,2} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}. \quad (36)$$

Тем же способом находим

$$\begin{aligned} \left[\vec{\xi} \text{ grad } \frac{B_e^2}{8\pi} \right]_{s_e} = & \frac{\gamma^2 p^2}{12\pi} \left[\frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e} \frac{P_2^2(\mu)}{1 - \frac{e^2}{3} P_2^2(\mu)} + \right. \\ & \left. + \frac{1 - \frac{1}{3} P_2^2(\mu)}{1 - \frac{e^2}{3} P_2^2(\mu)} \cdot \frac{R_{2,2}}{K_{2,2}} \right] K_{2,2} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}. \end{aligned} \quad (37)$$

Исходя из уравнений (13) и (23), легко получить дифференциальное уравнение Пуанкаре для определения функции Π

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{4\omega^2}{s^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Pi = 0. \quad (38)$$

При выводе последнего уравнения предполагалось, что $u \sim e^{st}$. Поскольку нас интересует гармоника $n=m=2$, то, следуя Картану [1], воспользуемся следующим частным решением уравнения Пуанкаре

$$\Pi = h(x + iy)^2, \quad (h = \text{const}). \quad (39)$$

Тогда с помощью (23) легко получить, что

$$u_x = -\frac{2h(x + iy)}{s - 2i\omega}, \quad u_y = -\frac{2hi(x + iy)}{s - 2i\omega}, \quad u_z = 0. \quad (40)$$

Очевидно, что вектор $\vec{u}$, определяемый согласно (40), удовлетворяет условиям (13) и (14).

Далее, легко показать также, что

$$[\Pi]_{s_e} = \frac{a^2 h}{3} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}, \quad (41)$$

$$[h e_\zeta]_{s_e} = -\frac{2ea^2 h (1 - e^2)^{1/2}}{3(s - 2i\omega)} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}, \quad (42)$$

$$[h_\theta u_\theta]_{s_e} = -\frac{2a^2 h}{3(s - 2i\omega)} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}. \quad (43)$$

Тогда с учетом (42) и (43) интегрирование выражений (30) и (31) дает

$$K_{2,2} = -\frac{2a^2 h e (1 - e^2)^{1/2}}{3s(s - 2i\omega)}, \quad (44)$$

$$R_{2,2} = -\frac{2a^2 h}{3s(s - 2i\omega)}. \quad (45)$$

Подставляя выражения (44) и (45) в (37), получим

$$\left[\vec{\xi} \operatorname{grad} \frac{B_e^2}{8\pi} \right]_{s_e} = \frac{\gamma^2 p^2}{4\pi} \frac{K_{2,2}}{e(1 - e^2)^{1/2}} \cdot P_2^1(\mu) e^{2i\varphi}. \quad (46)$$

С учетом выражений (35), (36), (41) и (46) граничное условие (25) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} [\Phi + \rho\Pi]_{s_e} = & -\frac{\pi G p^2}{2e^5} \left[e(1 - e^2)^{1/2} (3 + 10e^2) - (3 + 8e^2 - 8e^4) \arcsin e - \right. \\ & \left. - \frac{\gamma^2}{2\pi^2 G} \cdot e^5 (1 - e^2)^{-1/2} \right] K_{2,2} P_2^1(\mu) e^{2i\varphi} + \frac{\rho a^2 h}{3} P_2^1(\mu) e^{2i\varphi} = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$s(s - 2i\omega) + Q - \frac{B_0^2}{2\pi\rho a^2} = 0, \quad (47)$$

где мы ввели обозначение

$$Q = \frac{\pi G p}{e^5} (1 - e^2)^{1/2} [e(1 - e^2)^{1/2} (3 + 10e^2) - (3 + 8e^2 - 8e^4) \arcsin e]. \quad (48)$$

Уравнение (47) без последнего члена (магнитное поле отсутствует) есть результат Картана.

Решения уравнения (47) имеют вид

$$s_{1,2} = i \left[\omega \pm \left(Q + \omega^2 - \frac{B_0^2}{2\pi\rho a^2} \right)^{1/2} \right], \quad (49)$$

где $\omega^2 - \frac{B_0^2}{2\pi\rho a^2}$ дается выражением (12), а Q — (48). Следовательно,

подкоренное выражение в (49) есть та же функция от e , что и в результате Картана, т. е. оно становится отрицательным при $e > 0,9259$.

Итак, при $\omega^2 > \frac{B_0^2}{2\pi\rho a^2}$ магнитное поле не влияет на устойчивость конфигурации, но, как видно из (12) и (49), оно изменяет частоту колебаний сплюсненного сфероиды. Существенно отметить, что частота увеличивается с ростом магнитного поля до тех пор, пока $B_0 \leq a\omega \sqrt{2\pi\rho}$. В противном случае сфероиды Маклорена превращаются в серию сфероидов, вытянутых вдоль оси вращения [3], устойчивость которых рассмотрена нами в работе [5].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. P. H. Roberts, Stewartson. The Ap. J., 137, 777 (1963).
2. N. R. Lebovitz. The Ap. J., 134, 500 (1961).
3. Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян. Астрономический журнал (в печати).
4. Е. В. Гобсон. Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.
5. Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян. Астрофизика, 8, 525 (1972).

ՄԱԿԼՈՐԵՆԻ ՍՖԵՐՈՒԴՆԵՐԻ ՄԱԳՆԵՏԱԶԻԴՐՈՂԻԱՄԻԿԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ռ. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Մ. Գ. ԱՐԲՆԱՄՅԱՆ

Աշխատանքում քննարկված է Մակլորենի սֆերոիդների կայունությունը՝ թորողիալ մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում։ Կայունությունը դիտարկված է $n=m=2$ տիպի մակերևութային փոքր դեֆորմացիաների նկատմամբ, որոնք հանդիսանում են որոշող՝ հեղուկ ձևերի տեսության մեջ [1, 2]։ Պարզվում է, որ մագնիսական դաշտը ($B_0 < B_c = \omega a \sqrt{2\pi\rho}$ [3]) չէ փոխում սեղմված էլիպսոիդների կայունությունը, այլ միայն փոխում է տատանումների հաճախությունը։

ON THE MAGNETOHYDRODYNAMIC THEORY OF STABILITY OF MACLAURIN SPHEROIDS

R. S. OGANESSIAN, M. G. ABRAHAMIAN

In this paper the question of stability of Maclaurin spheroids in the presence of toroidal magnetic field is considered. The stability concerning small surface perturbations of the type $m = n = 2$, which are decisive in the theory of liquid figure- (1, 2) is studied. It is established that the magnetic field ($B_0 < B_c = \omega a \sqrt{2\pi\rho}$ [3]) does not alter the criterion of stability of oblate spheroids, but only changes the frequency of oscillations.