Изв. АН Армянской ССР, Физика, 7, 293—297 (1972)

СИНУСОИДАЛЬНОЕ ПОЛЕ В ДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЕ С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

М. А. КАРАПЕТЯН

Исследуется переходный процесс установления гармонического электрического поля во включениях и дисперсионной среде у вершин первых. Определены электрический момент поляризованных включений и диэлектрическая проницаемость системы.

В неоднородной среде с заметной проводимостью, каковыми являются реальные дисперсные системы, электрическое поле не может устанавливаться мгновенно. Переходный процесс установления поля в [1, 2] исследован при внешнем постоянном поле. Ниже приводится исследование переходного режима установления гармонического однородного поля в дисперсной системе с эллипсоидальными включениями.

Пусть в дисперсионной среде с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε_2 и удельной электропроводностью γ_2 установлено однородное гармоническое поле. Внесем в это поле включения эллипсоидальной формы из материала с параметрами ε_1, γ_1. В первое мгновение внесения в поле включений или в первое мгновение наложения поля на дисперсную систему поле распределяется между средой и включениями пропорционально их диэлектрическим проницаемостям. Первоначальное распределение поля можно найти из расчета электростатического поля. Для случая одиночного диэлектрического эллипсоида в однородном электростатическом поле E_0 получено решение [3]

$$E_1(0)=\frac{\varepsilon_2 E_0}{\varepsilon_2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)N_x}, \quad E_2(0)=\frac{\varepsilon_1 E_0}{\varepsilon_2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)N_x}, \tag{1}$$

где $E_1(0)$ — напряженность электрического поля внутри единственного эллипсоида, $E_2(0)$ — напряженность в дисперсионной среде на границе с эллипсоидом у его вершины по оси 2a, N_x — коэффициент деполяризации эллипсоида вдоль оси x [4]. Принято, что вектор $\vec{E}_0$, ось эллипсоида 2a и ось x декартовой системы координат совпадают по направлению.

Если в (1) вместо E_0 подставить $E_{0m}\sin\psi$, то получим выражения для напряженностей в первое мгновение наложения синусоидального однородного поля. Однако это решение верно для одиночного включения. В дисперсной системе включений много. Здесь следует считаться с явлением взаимного влияния полей поляризованных включений. Каждое включение в дисперсной системе поляризуется не во внешнем поле $E_0(t)$, а под воздействием так называемого действующего поля [5]

$$E_g=E_{0m}\sin(\omega t+\psi)+\frac{P}{3\varepsilon_2}, \tag{2}$$

где P — электрический момент включений в единице объема дисперсной системы, $P = \nu p$, ν — число включений в единице объема системы, p — электрический момент поляризованного включения.

Подставив $E_g(0)$ из (2) в (1), для электростатического поля в дисперсной системе при учете явления взаимного влияния получим

$$E_1(0) = E_{0m}\sin\psi - \frac{(1-f)N_x}{\frac{4\pi}{3}abc\,\varepsilon_2}p(0),$$

$$E_2(0) = E_{0m}\sin\psi + \frac{1-(1-f)N_x}{\frac{4\pi}{3}abc\,\varepsilon_2}p(0), \tag{3}$$

где

$$p(0) = \frac{4\pi}{3}abc\,\varepsilon_2 m E_{0m}\sin\psi,\quad m = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(1-f)N_x}, \tag{4}$$

$f = \frac{4\pi}{3}abc\,\nu$ — объемная концентрация включений.

В общем случае p, E_1, E_2 и внешнее поле являются функциями времени. Для этого случая выражения (3) следует переписать в виде

$$E_1(t) = E_{0m}\sin(\omega t+\psi) - \frac{(1-f)N_x}{\frac{4\pi}{3}abc\,\varepsilon_2}p(t),$$

$$E_2(t) = E_{0m}\sin(\omega t+\psi) + \frac{1-(1-f)N_x}{\frac{4\pi}{3}abc\,\varepsilon_2}p(t). \tag{5}$$

В правых частях этих уравнений неизвестной является функция электрического момента включений $p(t)$. Для определения $p(t)$ воспользуемся принципом непрерывности линий тока на границе включение-дисперсионная среда у вершины (по оси 2a) первого:

$$\gamma_1 E_1(t) + \varepsilon_1\frac{dE_1(t)}{dt} = \gamma_2 E_2(t) + \varepsilon_2\frac{dE_2(t)}{dt}. \tag{6}$$

Совместным решением уравнений (5) и (6) для мгновенного значения электрического момента включений будем иметь

$$p(t) = K'E_{0m}\sin(\omega t+\psi+\vartheta-\vartheta_1) - K''\sin(\psi-\vartheta_1)\,e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{7}$$

где

$$K' = \frac{4\pi}{3}abc\,\varepsilon_2 n\sqrt{\frac{1+\omega^2\theta^2}{1+\omega^2\tau^2}},\quad K'' = \frac{4\pi}{3}abc\,\varepsilon_2 m\frac{\tau-\theta}{\theta\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}E_{0m},$$

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\omega\theta,\quad \vartheta_1 = \operatorname{arctg}\omega\tau,\quad n = \frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_2+(\gamma_1-\gamma_2)(1-f)N_x}, \tag{8}$$

$$\tau = \frac{\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1-f) N_x}{\gamma_2 + (\gamma_1 - \gamma_2)(1-f) N_x}.$$

Весьма интересно, что установившаяся составляющая $p(t)$ (7) по фазе не совпадает с внешним полем. В зависимости от отношения параметров среды и включений $p(\infty)$ может отставать или опережать внешнее поле. В частности, при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и $\gamma_1 < \gamma_2$ (или наоборот) $\vartheta < 0$ и $p(\infty)$ по фазе отстает от внешнего поля.

Параметр γ вещества в стационарном поле представляет собой удельную электропроводность по постоянному току. В случае гармонического поля под символом γ следует подразумевать удельную активную проводимость вещества. В таком представлении $\gamma_1 = \omega\varepsilon_1 \operatorname{tg} \delta_1$, $\gamma_2 = \omega\varepsilon_2 \operatorname{tg} \delta_2$. Этот параметр учитывает потери энергии как от тока проводимости, так и потери, обусловленные поляризацией однородного вещества.

Подставив (7) в (5), для напряженностей получим

$$E_1(t) = K_1' E_{0m} \sin(\omega t + \psi - \vartheta_1 + \vartheta_2) + K_1'' E_{0m} \sin(\psi - \vartheta_1)\, e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$E_2(t) = K_2' E_{0m} \sin(\omega t + \psi - \vartheta_1 + \vartheta_3) + K_2'' E_{0m} \sin(\psi - \vartheta_1)\, e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{9}$$

где

$$K_1' = [1 - n(1-f) N_x] \sqrt{\frac{1+\omega^2\eta^2}{1+\omega^2\tau^2}},\quad K_1'' = (1-f)\, m N_x \frac{\tau - \theta}{\theta\sqrt{1+\omega^2\tau^2}},$$

$$K_2' = \{1 + n[1-(1-f) N_x]\} \sqrt{\frac{1+\omega^2\mu^2}{1+\omega^2\tau^2}},\quad K_2'' = [1-(1-f)N_x]\, m \frac{\tau-\theta}{\theta\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}. \tag{10}$$

Здесь

$$\eta = \frac{\tau - n(1-f) N_x\theta}{1 - n(1-f) N_x},\quad \mu = \frac{\tau + n[1-(1-f) N_x]\theta}{1 + n[1-(1-f) N_x]},$$

$$\vartheta_2 = \operatorname{arctg} \omega\eta,\quad \vartheta_3 = \operatorname{arctg} \omega\mu. \tag{11}$$

Фазы установившихся составляющих $E_1(\infty)$ и $E_2(\infty)$ не совпадают между собой и внешним полем.

Заслуживает быть отмеченным тот факт, что все коэффициенты переходных составляющих — K_i'' содержат в числителе разность $\tau - \theta$. При соблюдении равенства $\tau = \theta$ или, согласно (8), $m = n$, переходный процесс установления гармонического поля не будет иметь места, то есть поле установится мгновенно. В общем случае, условие $\tau = \theta$ не соблюдается.

Переходный процесс установления поля может отсутствовать и при условии $\psi - \vartheta_1 = 0$. Однако это условие может иметь место только случайно.

Уравнения (7) — (11) могут быть преобразованы для частных случаев сферы ($N_x = 1/3$), дискообразных ($N_x = 1$) и бесконечно цилиндрических ($N_x = 0$) включений. Все эти решения упрощаются для случая одиночного включения ($f = 0$).

Абсолютную диэлектрическую проницаемость дисперсной системы можно подсчитать по формуле

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + k_a, \tag{12}$$

где k_a — абсолютная диэлектрическая восприимчивость включений в единице объема системы,

$$k_a = \nu \frac{p}{E_0}. \tag{13}$$

В установившемся режиме удобно пользоваться комплексным значением диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$, определяемым из формул (12) и (13), записанных в комплексном виде.

Совместное решение (5), (6), (12) и (13) приводит к следующим результатам:

$$\dot{p} = \frac{4\pi}{3} abc\, \varepsilon_2 n \frac{1 + j\omega\theta}{1 + j\omega\tau} \cdot \dot{E}_0, \tag{14}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_2 \left[1 + fn \frac{1 + \omega^2\theta\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\right], \tag{15}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{fn\omega(\tau - \theta)}{1 + \omega^2\tau^2 + fn(1 + \omega^2\theta\tau)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Карапетян*, Электричество, № 10 (1971).
2. *М. А. Карапетян, М. А. Арамян*. Изв. АН АрмССР, Физика, 6, 512 (1971).
3. *Дж. А. Стрэттон*, Теория электромагнетизма, Госэнергоиздат, 1948.
4. *К. М. Поливанов*, Теоретические основы электротехники, часть III, Энергия, 1969.
5. *Г. И. Сканави*, Физика диэлектриков, ГИТТЛ, 1949.

ՍԻՆՈՒՍՈՒԴԱԿԱՆ ԴԱՇՏԸ ԷԼԻՊՍՈՒԴԱՁԵՎ ՆԵՐԱՌՈՒՄՆԵՐՈՎ ԴԻՍՊԵՐՍ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐՈՒՄ

Մ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Էլեկտրական դաշտն անհամասեռ միջավայրում հաստատվում է ոչ ակնթարթորեն, այլ անցողիկ երևույթից հետո։ Աշխատանքում ուսումնասիրված է հարմոնիկ համասեռ էլեկտրական դաշտի անցողիկ երևույթներն էլիպսոիդաձև ներառումներով դիսպերս սիստեմներում։ Հաշվարկը կատարված է ի նկատի առնելով բևեռացող մասնիկների դիպոլային փոխազդեցությունները։ Այդ պայմաններում որոշված են բևեռացված էլիպսոիդների էլեկտրական մոմենտների ակնթարթային և կոմպլեքս արժեքները։ Դա հնարավորություն է տվել ստանալ դիէլեկտրիկական թափանցելիության և կորուստների անկյան տանգենսի բանաձևերը։

SINUSOIDAL FIELD IN A DISPERSE MEDIUM WITH ELLIPSOIDAL INCLUSIONS

M. A. KARAPETIAN

The transitional process of harmonic electric field settling is investigated (a) in the interior of the dispersed particles, (b) in the dispersion medium and (c) at the vertices of the particles.

The electrical moment of polarized particles is determined. Formulas are derived for the calculation of the dielectric permitivity of the system.