

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТУПЕНЬКЕ

О. С. МЕРГЕЛЯН

В приближении теории возмущений решена задача дифракции электромагнитной волны на диэлектрической ступеньке высоты d и ширины $2l$. Получены выражения для амплитуд рассеянных волн и их углового распределения.

Пусть плоская электромагнитная волна падает из вакуума на диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , имеющий ступенчатый выступ высоты d и ширины $2l$. Координатную систему выберем так, чтобы ось z проходила из вакуума в диэлектрик, причем плоскость (zy) делила ступеньку пополам, а вершина ступеньки лежала на плоскости $z = 0$ (рис. 1). Запишем поле падающей волны в виде

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\omega) e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)}, \quad k_1 = \frac{\omega}{c}. \quad (1)$$

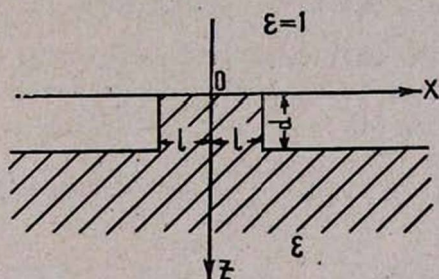


Рис. 1.

Разделим наше пространство на 3 области:

- 1) Область $z < 0$ с диэлектрической проницаемостью, равной единице.
- 2) Область $0 \leq z \leq d$ с переменной диэлектрической проницаемостью

$$\tilde{\epsilon}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < -l \text{ и } x > l \\ \epsilon & \text{при } -l \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2)$$

- 3) Область $z > d$ с диэлектрической проницаемостью ϵ .

Тогда волна (1) формально падает на грань $z=0$ плоско-параллельного слоя с переменной диэлектрической проницаемостью.

Обозначив $\epsilon - 1 = \Delta$, представим $\tilde{\epsilon}(x) - 1$ в виде интеграла Фурье

$$\tilde{\epsilon}(x) - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(a) e^{iax} da, \quad (3)$$

где

$$\sigma(a) = \Delta \frac{\sin(al)}{\pi a}. \quad (4)$$

Тогда $\tilde{\varepsilon}(x)$ можно представить как

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(x) &= 1 + \varepsilon'(x), \\ \varepsilon'(x) &= \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(al)}{a} e^{iax} dx, \end{aligned} \quad (5)$$

и при $\varepsilon' \ll 1$ к решению задачи применима теория возмущений [1] — [3].

Представим поле и индукцию внутри слоя (0, d) в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad \vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{D}', \quad \vec{D}' = \varepsilon' \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad (6)$$

причем считаем, что малая поправка ε' дает малую поправку $\vec{E}'$, т. е. $\vec{E}' \ll \vec{E}_0$. В качестве $\vec{E}_0(r, t)$ берется сумма полей, распространяющихся в слое в направлениях $\pm z$:

$$\vec{E}_0(r, t) = \vec{E}_1(\omega) e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_2(\omega) e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)}. \quad (7)$$

В формуле (7) $\vec{E}_1(\omega)$ — амплитуда падающей волны (1), $\vec{E}_2(\omega)$ — амплитуда волны, отраженной от плоской границы $z = d$, даваемая обычными формулами Френеля [4],

$$\vec{k}_{1,2}(k_x, k_y, \pm k_z), \quad k_x = \frac{\omega}{c} \sin \theta \cos \varphi, \quad (8)$$

$$k_y = \frac{\omega}{c} \sin \theta \sin \varphi, \quad k_z = \frac{\omega}{c} \cos \theta,$$

θ и φ — углы падения в плоскостях (x, z) и (x, y) .

Поле $\vec{E}'$ внутри слоя удовлетворяет уравнению [3]

$$\nabla(\nabla \vec{E}') - \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E}' = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon' \vec{E}_0(r, t). \quad (9)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}'(r, t) &= \int e^{i[(k_x + \alpha)x + k_y y - \omega t]} \cdot [\vec{A}_1 e^{ik_z z} + \\ &+ \vec{A}_2 e^{-ik_z z} + \vec{B}_1 e^{i\alpha z} + \vec{B}_2 e^{-i\alpha z}] d\alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

В формуле (10)

$$\vec{A}_{1,2} = \frac{\Delta}{\pi a} \sin(al) \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_{1,2}(\omega) - \alpha E_{1,2x}(\vec{k}_{1,2} + \vec{n}_x \alpha)}{\alpha(\alpha + 2k_x)}. \quad (11)$$

Амплитуды $\vec{B}_{1,2}$ определяются из граничных условий, а

$$\lambda_a = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 - (k_x + a)^2}. \quad (12)$$

Поля в областях $z < 0$ и $z > d$, возникшие вследствие наличия возмущения ε' , обозначим через $\vec{E}_{1,2}$ соответственно. Ищем их в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{r}, t) &= \int \vec{C}_1(\omega, a) e^{i[(k_x+a)x + k_y y - \lambda_a z - \omega t]} da, \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) &= \int \vec{C}_2(\omega, a) e^{i[(k_x+a)x + k_y y + \lambda'_a z - \omega t]} da, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\lambda'_a = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_y^2 - (k_x + a)^2}.$$

Соответствующие (12) амплитуды магнитных полей обозначим через $\vec{P}_{1,2}(a, \omega)$, причем из уравнений поля

$$\begin{aligned} \vec{P}_1(a, \omega) &= \frac{c}{\omega} [\vec{x}_z - \lambda_a \vec{n}_z, \vec{C}_1(a, \omega)], \\ \vec{P}_2(a, \omega) &= \frac{c}{\omega} [\vec{x}_a + \lambda'_a \vec{n}_z, \vec{C}_2(a, \omega)], \\ \vec{x}_a &= (k_x + a) \vec{n}_x + k_y \vec{n}_y. \end{aligned} \quad (14)$$

Из граничных условий имеем

$$\begin{aligned} C_{1z}(a, \omega) &= \frac{1}{2} f(a) [g_1 \xi_1 - \lambda_a g'_1 \xi'_1 + g_2 \xi_2 - \lambda_a g'_2 \xi'_2], \\ C_{2z}(a, \omega) &= f(a) \lambda_a [g_1 \eta_1 - g'_1 \eta'_1 + g_2 \eta_2 - g'_2 \eta'_2] e^{-i\lambda'_a d}, \\ P_{1z}(a, \omega) &= -\frac{1}{2} f(a) [\lambda_a^2 + \lambda_a \lambda'_a] \frac{c}{\omega} \{Q_1[\vec{x}_a \vec{E}_1] + Q_2[\vec{x}_a \vec{E}_2]\}, \\ P_{2z}(a, \omega) &= -f(a) [\lambda_a^2 + \lambda_a \lambda'_a] \frac{c}{\omega} \times \\ &\times \{Q_1[\vec{x}_a \vec{E}_1]_z + Q_2[\vec{x}_a \vec{E}_2]_z\} e^{-i\lambda'_a d}. \end{aligned} \quad (15)$$

В формулах (15)

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{\sigma(a)}{a \lambda_a (a + 2k_x) (\lambda'_a + \varepsilon \lambda_a)}, \\ g_1 &= a \lambda_a^2 E_{1x} - k_z \frac{\omega^2}{c^2} E_{1z}, \quad g'_1 = k_a^2 E_{1z} - a k_z E_{1x}, \quad k_a^2 = \lambda_a^2 + k_z^2, \\ \xi_1 &= (\lambda'_a + \varepsilon \lambda_a) - (\lambda'_a - \varepsilon \lambda_a) e^{2i\lambda_a d} - 2\lambda_a e^{i(k_z + \lambda_a) d}, \\ \xi'_1 &= (\lambda'_a + \varepsilon \lambda_a) - (\lambda'_a - \varepsilon \lambda_a) e^{2i\lambda_a d} + 2\lambda'_a e^{i(k_z + \lambda_a) d}, \\ \eta_1 &= e^{i\lambda_a d} - e^{ik_z d}, \quad \eta'_1 = \lambda_1 e^{i\lambda_a d} + \frac{1}{\varepsilon_2} \lambda'_a e^{ik_z d}, \end{aligned} \quad (15a)$$

$$Q_1 = (\lambda_\alpha + k_z)(\lambda_\alpha + \lambda'_\alpha) + 2\lambda_\alpha(\lambda'_\alpha - k_z) e^{i(k_z + \lambda_\alpha)d} + (\lambda_\alpha + k_z)(\lambda_\alpha - \lambda'_\alpha) e^{2i\lambda_\alpha d},$$

$$Q'_1 = (\lambda_\alpha - k_z) e^{ik_z d} - (\lambda_\alpha + k_z) e^{i\lambda_\alpha d}.$$

Соответствующие величины с индексом 2 получаются из (15а) заменой $k_z \rightarrow -k_z$ и $\vec{E}_1 \rightarrow \vec{E}_2$ в g_1 и g'_1 .

Для получения частотного и углового распределений полей проинтегрируем выражения (13)–(15) по α . Интегрирование проведем методом перевала [5], что даст нам выражения для полей на больших расстояниях от рассеивающего центра.

Введем цилиндрические координаты ρ , Φ , y , причем

$$x = \rho \sin \Phi, \quad -z = \rho \cos \Phi \quad \text{для } z < 0$$

и

$$x = \rho \sin \Phi, \quad (z - d) = \rho \cos \Phi \quad \text{для } z > 0. \quad (16)$$

Точками перевала являются

$$\alpha_1 = \frac{\omega}{c} [V \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \sin \Phi - \sin \theta \cos \varphi] \quad \text{для } z < 0$$

и

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{c} [V \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \sin \Phi - V \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \cos \varphi] \quad \text{для } z > d. \quad (17)$$

Подставляя эти значения в (13)–(15), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1z}(\vec{r}, t) &= \frac{\sqrt{-i\pi \frac{\omega}{c} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)^{1/2}}}{\sqrt{\rho}} \cos \Phi \cdot C_{1z}(\omega, \Phi, \theta, \varphi) \times \\ &\times \exp \left[i \left(\frac{\omega}{c} V \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \rho + \frac{\omega}{c} \sin \theta \sin \varphi \cdot y - \omega t \right) \right], \\ \tilde{H}_{1z}(\vec{r}, t) &= \frac{\sqrt{-i\pi \frac{\omega}{c} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)^{1/2}}}{\sqrt{\rho}} \cos \Phi \cdot P_{1z}(\omega, \Phi, \theta, \varphi) \times \\ &\times \exp \left[i \left(\frac{\omega}{c} V \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \rho + \frac{\omega}{c} \sin \theta \sin \varphi \cdot y - \omega t \right) \right], \\ \tilde{E}_{2z}(\vec{r}, t) &= \frac{\sqrt{-i \frac{\omega}{c} (\varepsilon - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)^{1/2} \pi}}{\sqrt{\rho}} \cos \Phi \cdot C_{2z}(\omega, \Phi, \theta, \varphi) \times \\ &\times \exp \left[i \left(\frac{\omega}{c} V \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \rho + V \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega}{c} \sin \theta \sin \varphi \cdot y - \omega t \right) \right], \\ \tilde{H}_{2z}(\vec{r}, t) &= \frac{\sqrt{-i \frac{\omega}{c} (\varepsilon - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)^{1/2} \pi}}{\sqrt{\rho}} \cos \Phi \cdot P_{2z}(\omega, \Phi, \theta, \varphi) \times \\ &\times \exp \left[i \left(\frac{\omega}{c} V \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \rho + V \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega}{c} \sin \theta \sin \varphi \cdot y - \omega t \right) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

В формулах (18) значения $C_{1z}(\omega, \Phi, \vartheta, \varphi)$ и $P_{1z}(\omega, \Phi, \vartheta, \varphi)$ получаются из $C_{1z}(\omega, \alpha)$ и $P_{1z}(\omega, \alpha)$ соответственно подстановкой в них значения $\alpha = \alpha_1$ из (17). Аналогично, подставляя $\alpha = \alpha_2$ в $C_{2z}(\omega, \alpha)$ и $P_{2z}(\omega, \alpha)$, получим $C_{2z}(\omega, \Phi, \vartheta, \varphi)$ и $P_{2z}(\omega, \Phi, \vartheta, \varphi)$. Остальные компоненты электрических и магнитных полей без труда определяются из (18) и уравнений поля.

Из формул (18) видно, что рассеянная волна представляет собой цилиндрическую волну, что и следовало ожидать из физических соображений.

В заключение заметим, что полученные формулы справедливы и для общего случая, когда при $z > d$ мы имеем диэлектрик с проницаемостью ϵ_2 , а выступ $0 \leq z \leq d$, $-l \leq x \leq l$ характеризуется переменной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_1(x)$.

В этом случае в конечных формулах надо заменить ϵ на ϵ_2 , а под $\sigma(\alpha)$ понимать не выражение (4), а

$$\sigma(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l [\epsilon_1(x) - 1] e^{-i\alpha x} dx. \quad (4a)$$

Автор благодарен Б. М. Болотовскому и Г. М. Гарибяну за полезные обсуждения.

Поступила 20.IV.1972

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. О. С. Мерелян, Изв. вузов, Радиофизика, 13, 1412 (1970).
2. О. С. Мерелян, Оптика и спектроскопия, 30, 1123 (1971).
3. О. С. Мерелян, Изв. вузов, Радиофизика (в печати).
4. Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., 1959.
5. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).

ՀԱՐԹ ԷԼԵԿՏՐՈՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ԱՆԻՔԻ ՑՐՈՒՄԸ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿ
ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՎՐԱ

Հ. Ս. ՄԵՐԵԼՅԱՆ

Գրողաների տեսության մոտավորությամբ լուծված է դիէլեկտրիկ աստիճանի վրա էլեկտրամագնիսական ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը: Ստացված են արտահայտություններ ցրված ալիքների ամպլիտուդաների և անկյունային բաշխման համար:

THE SCATTERING OF A PLANE WAVE ON DIELECTRIC STEP

H. S. MERGELIAN

The problem of electromagnetic wave diffraction by a dielectric step of height d and width $2l$ is solved in perturbation theory approximation. The expressions for the amplitudes of scattered waves and their angular distribution are obtained.