

О ВОЗБУЖДЕНИИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ

К. А. БАРСУКОВ, В. Н. КАДАНЦЕВ

Рассматривается возбуждение черенковских магнитогидродинамических волн в цилиндрическом волноводе произвольного сечения, заполненном магнитогидродинамической средой, движущимся сгустком заряженных частиц, обладающим массой, электрическим и магнитным дипольным моментом.

Получены выражения для малых возмущений параметров среды и для компонент электромагнитного поля, возбуждаемого в волноводе. Определены полные потери энергии на излучение источников при их движении внутри волновода.

Черенковская генерация магнитогидродинамических волн движущимися источниками в неограниченных, хорошо проводящих средах, помещенных в магнитное поле, рассматривалось в ряде работ [1, 2, 3]. Однако в связи с развитием экспериментальной и технической магнитогидродинамики возникает необходимость исследования соответствующих вопросов для ограниченных сред.

Ниже рассматривается вопрос о возбуждении черенковских магнитогидродинамических волн в цилиндрическом волноводе произвольного сечения, заполненном магнитогидродинамической средой, движущимся сгустком заряженных частиц, обладающим электрическим и магнитным дипольными моментами и источником массы.

Пусть цилиндрический волновод произвольного сечения с осью параллельной оси z заполнен сжимаемой невязкой идеально проводящей жидкостью, и параллельно оси волновода наложено постоянное внешнее магнитное поле. Вдоль оси волновода движется точечный источник, обладающий зарядом g_0 , магнитным и электрическим моментами m_0 и p_0 , массой Q_0 .

Система линейных уравнений магнитной гидродинамики, описывающая малые возмущения в сжимаемой невязкой идеально проводящей среде в отсутствии гравитационных сил [4] при наличии сторонних силовых источников в уравнении движения и источников массы Q , имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \text{grad } p = \frac{1}{4\pi} \text{rot } \vec{h} \times \vec{H}_0 - \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{H}_0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v} &= Q, \\ \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} &= \text{rot } (\vec{v} \times \vec{H}_0), \\ \text{grad } p &= c^2 \text{grad } \rho, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ_0 и $\vec{H}_0$ — невозмущенные значения плотности и магнитного поля в среде, p , ρ , $\vec{v}$, $\vec{h}$ — малые отклонения от равновесных значений давления, плотности, скорости и магнитного поля, c_T — гидродинамическая скорость звука, $\vec{j}$ и Q — плотность стороннего электрического тока и распределения инжектируемой массы соответственно. Из системы уравнений (1) получим уравнение для вектора скорости

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = c_T^2 \text{grad div } \vec{v} + c_A^2 (\text{rot rot } (\vec{v} \times \vec{e}_z) \times \vec{e}_z) - \\ - \frac{1}{\rho_0 c} \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right) - \frac{c_T^2}{\rho_0} \text{grad } Q, \quad (2)$$

где $\vec{c}_A = \frac{\vec{H}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$ — скорость волны Альфвена, $\vec{e}_z$ — единичный вектор оси z . Ток $\vec{j}$ движущегося сгустка зарядов запишем в виде

$$\vec{j} = g\vec{v}_0 + c \text{rot } \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (3)$$

где v_0 — скорость источника.

Полагая, что все величины зависят от времени как $e^{-i\omega t}$, получим следующие выражения для Фурье-компонент плотностей заряда g , магнитного и электрического моментов M и P :

$$g_\omega = \frac{g_0}{2\pi v_0} e^{i \frac{\omega}{v_0} z} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \\ \vec{M}_\omega = \frac{\vec{m}_0}{2\pi v_0} e^{i \frac{\omega}{v_0} z} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \\ \vec{P}_\omega = \frac{\vec{p}_0}{2\pi v_0} e^{i \frac{\omega}{v_0} z} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (4)$$

и аналогично для Q_ω :

$$Q_\omega = \frac{Q_0}{2\pi v_0} e^{i \frac{\omega}{v_0} z} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (5)$$

Очевидно, что искомые величины p , ρ , $\vec{v}$, $\vec{h}$ и т. д. зависят от z также как и источники (4) и (5) посредством множителя $\exp \left\{ i \frac{\omega}{v_0} z \right\}$.

Введем потенциал, как это было сделано в [5]:

$$u = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \nabla_\perp \vec{v}_\perp. \quad (6)$$

Из уравнения (2), с учетом (4)–(5), после некоторых преобразований получим следующее уравнение для u_ω :

$$\Delta_\perp u_\omega + \left(\frac{\omega}{v_0}\right)^2 \mu^2 u_\omega = f_\omega, \quad (7)$$

где

$$\mu^2 = \frac{(1 - M_A^2)(1 - M_T^2)}{(M_A^2 + M_T^2 - 1)}, \quad (8)$$

$$f_\omega = \frac{M_A^2}{v_0^2(M_A^2 + M_T^2 - 1)} \left\{ (M_T^2 - 1) \nabla_\perp \vec{F}_\omega - \frac{i v_0}{\omega} \Delta_\perp F_{z\omega} \right\}, \quad (9)$$

$$\vec{F}_\omega = -\frac{i\omega}{c\rho_0} (\vec{j} \times \vec{H}_0) + \frac{c_T^2}{\rho_0} \text{grad } Q_\omega, \quad (10)$$

и, кроме того, введены обозначения

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

$$M_A = \frac{v_0}{v_A} = \frac{v_0}{c_A}, \quad M_T = \frac{v_0}{v_T} = \frac{v_0}{c_T}.$$

v_A и v_T — фазовые скорости альфвеновской волны, распространяющейся параллельно полю, и звуковой волны (при $\vec{H}_0 = 0$) соответственно. В отсутствие вязких и джоулевых потерь $v_A = c_A$ и $v_T = c_T$. Если же проводимость среды конечна или появляется вязкость, то в результате диссипативных процессов колебания затухают. В этом случае к первому и третьему уравнениям (1) добавляются диссипативные члены [4], приводящие к дисперсии фазовых скоростей v_A и v_T , которые теперь становятся комплексными величинами, мнимые части которых определяют фазовые сдвиги скоростей v_A и v_T по отношению к возмущениям магнитного поля $\vec{h}$ и плотности ρ .

На границе волновода нормальные составляющие скорости среды равны нулю. Это условие для u имеет следующий вид:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \right|_\Sigma = \left. \frac{\partial u_\omega}{\partial \vec{v}} \right|_\Sigma = 0, \quad (11)$$

где Σ — граница волновода и $\vec{v}$ — ее нормаль.

Соотношения (7) и (8) определяют хорошо известную вторую краевую задачу для уравнения Гельмгольца [6]. Пусть $\{\psi_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ — известные нам системы собственных функций и собственных значений этой краевой задачи. Тогда решение (7) будем искать в виде

$$u_\omega = \sum_n u_{\omega n} \psi_n(x, y). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (7) и разлагая правую часть (7) по системе функций $\{\psi_n\}$, получим

$$u_{\omega n} = \frac{f_{\omega n}}{\left(\frac{\omega}{v_0}\right)^2 - \lambda_n^2}, \quad (13)$$

где $f_{\omega n} = \iint f_n \psi_n(x, y) ds$ и интегрирование ведется по площади поперечного сечения волновода. Особенность знаменателя в (13) типа простого полюса позволяет найти потенциал по его Фурье-представлению. В самом деле, рассматривая интеграл по частоте как контурный, с обходом полюса в (13), диктуемым условиями излучения, получим после интегрирования следующее выражение для потенциала u :

$$u = \sum_n u_n \psi_n(x, y),$$

где u_n имеет вид

$$u_n = \frac{i}{4\rho} \frac{M_A^2}{(1 - M_A^2)} e^{i \frac{\omega_n}{v_0} (z - vt)} \left\{ \frac{\vec{H}_0}{v_0} \times \left[\frac{\omega_n v_0}{c} (\vec{p}_0 \times \vec{\nabla}_\perp \psi_n) + i \lambda_n^2 \vec{m}_{0z} \psi_n - \right. \right. \\ \left. \left. - \omega_n (\vec{m}_0 \times \vec{\nabla}_\perp \psi_n) \right] - \frac{v_0 \lambda_n^2 Q_0 \psi_n}{(1 - M_T^2) \omega_n} \right\}_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}. \quad (14)$$

Величина ω_n , входящая в (14), определяется из следующего выражения для частот излучения:

$$\omega_n = \lambda_n v_0 \sqrt{\frac{M_A^2 + M_T^2 - 1}{(1 - M_A^2)(1 - M_T^2)}}. \quad (15)$$

Как видно из (15), спектр излучения — дискретный и зависит от λ_n . Условие действительности частот излучения приводит к неравенству

$$\frac{M_A^2 + M_T^2 - 1}{(1 - M_A^2)(1 - M_T^2)} > 0, \quad (16)$$

которое является условием черенковской генерации магнитогидродинамических волн. На рисунке, в плоскости чисел M_A^2 и M_T^2 , заштрихованы области, в которых выполняется неравенство (16). При этом области „1“ и „2“ являются областями излучения медленной и быстрой волн соответственно.

Соотношение (14) позволяет найти значения величин $\vec{h}$, $\vec{v}$, ρ , p , которые определяются с помощью u_n следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} h_z &= -i H_0 \sum_n \frac{u_n}{\omega_n} \psi_n(x, y) \\ \vec{h}_\perp &= \frac{H_0 v_0}{\mu^2} \sum_n \frac{u_n}{\omega_n} \vec{\nabla}_\perp \psi_n(x, y) \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

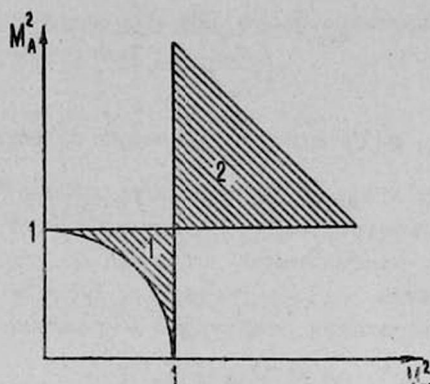


Рис.

$$\left. \begin{aligned} v_z &= \frac{iv_0}{(1-M_T^2)} \sum_n \frac{u_n}{\omega_n} \psi_n(x, y) \\ \vec{v}_\perp &= -\frac{v_0^2}{\mu^2} \sum_n \frac{u_n}{\omega_n^2} \vec{\nabla}_\perp \psi_n(x, y) \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

$$\rho = \frac{p}{c_T} = \frac{ip_0 M_T^2}{(1-M_T^2)} \sum_n \frac{u_n}{\omega_n} \psi_n(x, y). \quad (19)$$

Мощность черенковских магнитогидродинамических волн, излучаемых движущимся источником, может быть рассчитана с помощью выражения для потока энергии

$$\vec{g} = p\vec{v} + \frac{c}{4\pi} \vec{\varepsilon} \times \vec{h}, \quad (20)$$

где $\vec{\varepsilon}$ — возбуждаемое источником электрическое поле,

$$\vec{\varepsilon} = -\frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H}_0.$$

Значение полного потока мощности через сечение волновода получим, проинтегрировав продольную составляющую g_z по площади поперечного сечения волновода s ,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{dW}{dt}\right) &= - \iint_s (\vec{g} \cdot \vec{e}_z) ds = \\ &= \frac{\rho_0 v^3}{2(1-M_T^2)^2} \sum_n \frac{|u_n|^2}{\omega_n^2} \left\{ \frac{(M_A^2 + M_T^2 - 1)^2}{(M_A^2 - 1)^2} \left(\frac{c_A \lambda_n}{\omega_n} \right)^2 - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Следует отметить, что расходимости в выражении (21) при

$$v_0 = c_T, \quad v_0 = c_A, \quad v_0 = c_A c_T (c_A^2 + c_T^2)^{-1/2} \quad (22)$$

устраняются при учете вязких и джоулевых потерь.

Действительно, наличие вязкости и конечной проводимости приводит к тому, что v_A , v_T (а, следовательно, M_A , M_T) становятся ком-

плексными и при выполнении условий (22) выражения (14), (21) принимают конечные значения.

Поступила 25.X.1971

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Морозов, Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций, IV, Изд. АН СССР, 1958.
2. В. П. Докучаев, ЖЭТФ, 53, 723 (1967).
3. В. П. Докучаев, ЖЭТФ, 43, 587 (1965).
4. С. И. Сыроватский, УФН, 62, 247 (1957).
5. К. А. Барсуков, В. Н. Каданцев, А. Г. Нарышкина, Материалы к научной конференции преподавателей математических кафедр педагогических институтов Сибири (12—15 мая 1969 года), Новокузнецк, 1969.
6. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М., 1953.

ՄԱԳՆԵՏՈՆԻԴՐՈՆԻԿԱՄԵԿ ԱԼԻՔԱՏԱՐԻ ԳՐԳՈՒՄՐ ՇԱՐԺՎՈՂ ԱՂԹՅՈՒՐՈՎ

Կ. Ա. ԲԱՐՍՈՒԿՈՎ, Վ. Ն. ԿԱԴԱՆՏԵՎ

Իրադրված է մագնիտոհիդրոդինամիկ միջավայրով լցված կամավոր կտրվածք ունեցող ցիլինդրիկ ալիքատարում շերտավորված մագնիտոհիդրոդինամիկ ալիքների գրգռումը՝ ղանգված, էլեկտրական և մագնիսական դիպոլային մոմենտ ունեցող մասնիկների շարժվող թանձրումով:

ON THE EXCITATION OF MAGNETOHYDRODYNAMIC WAVEGUIDE BY A MOVING SOURCE

K. A. BARSUKOV, V. N. KADANTSEV

The problem of Cerenkov magnetohydrodynamic wave generation in a cylindrical waveguide of arbitrary section filled with magnetohydrodynamic medium is solved in linear approximation. A bunch of charged particles moving along the waveguide axis is taken as a perturbation point mass source, possessing the electric and magnetic dipole moments.

The energy losses due to the Cerenkov radiation of magnetohydrodynamic waves are determined.