Изв. АН Армянской ССР, Физика, 7, 188—199 (1972)

ИЗЛУЧЕНИЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В КРИСТАЛЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

Г. М. ГАРИБЯН, М. М. МУРАДЯН, ЯН ШИ

Получено решение основного интегрального уравнения микроскопической теории, определяющего поле излучения, образуемого равномерно движущейся заряженной частицей в кристалле произвольной толщины. Показано, что в модели точечных и неподвижных атомов решение в центральном пятне излучения формально совпадает с решением, следующим из макроскопической теории, кроме частот, удовлетворяющих условию Брэгга. Вблизи этих частот имеет место резкое отклонение интенсивностей излучений как вперед так и назад от формул макроскопической теории, не учитывающей кристаллической структуры вещества. Эти отклонения в основном сводятся к появлению весьма узких и высоких максимумов, аналогичных тем, которые появляются вблизи частот Брэгга в динамической теории рассеяния свободных рентгеновских лучей. Полученное решение учитывает также поглощение излучения в самом кристалле.

1. Введение

В работе [1] было получено основное интегральное уравнение для поля излучения, образуемого равномерно движущейся заряженной частицей в кристаллической пластине. Затем методом итераций было найдено и исследовано его решение, когда пластина является достаточно тонкой. В настоящей работе мы найдем решение этого уравнения для кристалла произвольной толщины.

Когда кристаллическая пластинка имеет бесконечные размеры в направлениях, перпендикулярных движению частицы, и конечный размер в продольном направлении, упомянутое интегральное уравнение для поперечной составляющей Фурье-компоненты рассеянного поля (уравнение (16) из [1] в случае, когда главным процессом является томсоновское рассеяние) имеет вид

$$E^{i}_{\text{рас}}(\vec{\varkappa}, k_z) = \frac{-\omega_0^2 z_0}{2\pi c^2 (k_z^2 - \lambda_0^2)} \sum_h \int_{-\infty}^{+\infty} T_h \sum e^{i(k_z' - k_z) z_n} \times$$

$$\times (\delta^{ij} - k^i k^j c^2/\omega^2) \left[E^{j}_{\text{рас.}}(\vec{\varkappa}_h, k_z') + E^{j}_{\text{зар}}(\vec{\varkappa}_h, k_z')\right] dk_z', \tag{1}$$

где

$$\vec{\varkappa}_h = \vec{\varkappa} + \vec{\chi}_h, \quad T_h = \exp\left[-M\left(\sqrt{\chi_h^2 + (k_z' - k_z)^2}\right)\right] f\left(\sqrt{\chi_h^2 + (k_z' - k_z)^2}\right)/Z$$

и, кроме того, для краткости опущен аргумент ω в Фурье-компонентах полей, тогда как все остальные обозначения совпадают с соответствующими обозначениями работы [1].

В дальнейшем мы будем интересоваться центральным пятном „лауэграммы“ кристалла, т. е. полагаем $\varkappa \ll \chi_1$.

Прежде всего заметим, что вклады от слагаемых $E^j_{\text{зар}}(\varkappa_h, k'_z)$ с $\chi_h \neq 0$ в формуле (1) малы по сравнению со вкладом от слагаемого $h=0$, т. е. $\chi_h = 0$. Действительно, поскольку $\chi_h \sim 2\pi|h|/a$, где a порядка постоянной решетки, а для центрального пятна излучения $\varkappa \sim \omega(1-\beta^2)^{1/2}/c$, т. е. при $h \neq 0$ величина $\chi_h \gg \varkappa$ и $|\vec{\varkappa}+\vec{\chi}_h|^2 \gg \omega^2/v^2 - \omega^2/c^2$, то из-за своего большого знаменателя $(\vec{\varkappa}+\vec{\chi}_h)^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2}$ слагаемые $E^j_{\text{зар}}(\vec{\varkappa}_h, k'_z)$ с $h \neq 0$ будут малы. Кроме того, эти слагаемые будут экспоненциально убывать с ростом $|h|$ из-за наличия фактора T_h.

Несколько сложнее обстоит дело с учетом слагаемых, содержащих $E_{\text{рас}}(\varkappa_h, k'_z)$ с $\chi_h \neq 0$ в уравнении (1). Вообще говоря, мы должны были бы помимо уравнения (1) еще написать интегральные уравнения для величин $E_{\text{рас}}(\varkappa_h, k'_z)$, аналогичные уравнению (1), и совместно решить полученную систему уравнений. Однако следует заметить, что вдали от частот, удовлетворяющих условию диффракции Брэгга с $\chi_h \neq 0$, вклады от $E_{\text{рас}}(\varkappa_h, k_z)$ будут незначительны [2]. Поэтому если ограничиться решением одного интегрального уравнения (1) с $h=0$, то оно даст правильный ответ везде, кроме указанных брэгговских частот. Что же касается брэгговских отражений почти точно назад, соответствующих $\chi_h = 0$ и $\omega = k\pi c/z_0$ (k — целое число, z_0 — расстояние между атомными плоскостями), то они будут правильно описаны таким уравнением, поскольку интеграл по k'_z охватывает и волновые векторы отраженных волн.

Далее, поскольку мы интересуемся центральным пятном излучения, то можно с хорошей точностью пренебречь членом $k^l k^j c^2/\omega^2$ в уравнении (1), учитывающим непоперечность поля. Если к тому же ограничить наше рассмотрение моделью кристалла, состоящего из точечных и неподвижных атомов ($T_h = 1$), то с учетом всего вышесказанного уравнение (1) запишется в виде

$$E^l_{\text{рас}}(\vec{\varkappa}, k_z) = -\frac{\omega_0^2 z_0}{2\pi c^2 (k_z^2 - \lambda_0^2)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_n e^{i(k'_z - k_z) z_n} [E^l_{\text{рас}}(\vec{\varkappa}, k'_z) + E^l_{\text{зар}}(\vec{\varkappa}, k'_z)]\, dk'_z. \tag{2}$$

Таким образом, задача свелась к решению неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

2. Решение интегрального уравнения

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться полным полем $E(\varkappa, k_z) = E_{\text{рас}}(\varkappa, k_z) + E_{\text{зар}}(\varkappa, k_z)$, для которого уравнение (2) примет вид

$$E(\vec{\varkappa}, k_z) = -\frac{\omega_0^2 z_0}{c^2 (k_z^2 - \lambda_0^2)} \sum_{n=1}^{N} E_n e^{-ik_z z_n} + E_{\text{зар}}(\varkappa, k_z), \tag{3}$$

где

$$E_n = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(\vec{\varkappa}, k_z)\, e^{ik_z z_n}\, dk_z, \tag{4}$$

$z_n = (n-1)\, z_0$, N — число атомных плоскостей в кристаллической пластине. В последних формулах мы опустили векторный индекс l у Фурье-компонент полей.

Умножив обе части уравнения (3) на $(2\pi)^{-1}$ exp $(ik_z z_m)$ и проинтегрировав по k_z, получим для поперечных компонент

$$E_m + \sum_{n=1}^{N} L_{mn} E_n = a_m, \tag{5}$$

где

$$a_m = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_{\text{зар}}(\varkappa, k_z)\, e^{ik_z z_m} dk_z = g e^{i\omega z_m/v}, \tag{6}$$

$$L_{mn} = \frac{\alpha\lambda_0}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_z(z_m - z_n)}}{k_z^2 - \lambda_0^2}\, dk_z = \frac{\alpha i}{2} e^{i\lambda_0 |z_m - z_n|},$$

$$g = -\frac{4\pi e i\varkappa}{\left(\dfrac{\omega^2}{v^2} - \lambda_0^2\right) v}, \quad \alpha = \frac{\omega_0^2 z_0}{\lambda_0 c^2}. \tag{7}$$

Несобственный интеграл в формуле (7) мы вычислили, сместив полюс $k_z = \lambda_0$ в верхнюю полуплоскость комплексных значений k_z, а полюс $k_z = -\lambda_0$ в нижнюю полуплоскость (для $\omega > 0$). Такое смещение полюсов соответствует введению небольшого затухания в величину λ_0.

Таким образом, благодаря вырожденности ядра интегрального уравнения (2), оно свелось к системе линейных неоднородных алгебраических уравнений (5) относительно величин E_n. Найдя эти величины, с помощью уравнения (3) можно определить $E(\varkappa, k_z)$.

Для решения системы уравнений (5) введем новые величины A_m и B_m, являющиеся линейными комбинациями искомых величин E_n,

$$A_m = \sum_{n=1}^{m} E_n \exp[-i\lambda_0 (z_m - z_n)],\ B_m = \sum_{n=1}^{m} E_n \exp[i\lambda_0 (z_m - z_n)]. \tag{8}$$

Подставим в уравнения (5) значения L_{mn} из (7) и разобьем сумму по n на две: от $n = 1$ до $m - 1$ и от m до N. Дополним вторую сумму до полной суммы, начинающейся с $n = 1$, и вычтем добавленную часть. Принимая во внимание величны, определенные формулами (8), получим

$$E_m = b_m + \frac{i\alpha}{2} A_{m-1} e^{-i\lambda_0 z_0} - \frac{i\alpha}{2} B_{m-1} e^{i\lambda_0 z_0}, \tag{9}$$

где

$$b_m = a_m - \frac{i\alpha}{2} A_N e^{-i\lambda_0(z_m - z_N)}. \tag{10}$$

Имея в виду определение (8) величин A_m и B_m, выразим их через A_{m-1}, B_{m-1} и E_m. Воспользовавшись далее формулой (9), можно получить рекуррентные соотношения для A_m и B_m, которые удобно записать в матричном виде

$$C_m = S \cdot C_{m-1} + D_m, \tag{11}$$

где

$$C_m = \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix}, \; D_m = \begin{pmatrix} b_m \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{i\alpha}{2}\right) e^{-i\lambda_0 z_0}, & -\frac{i\alpha}{2} e^{i\lambda_0 z_0} \\ \frac{i\alpha}{2} e^{-i\lambda_0 z_0}, & \left(1 - \frac{i\alpha}{2}\right) e^{i\lambda_0 z_0} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Заметим, что $\operatorname{Det} S = 1$.

Последовательно применим рекуррентное соотношение (11) для $m = 2, 3 \cdots k$ и в результате получим [3]

$$C_k = \sum_{n=1}^{k} S^{k-n} \cdot D_n. \tag{13}$$

При написании формулы (13) было принято во внимание, что в силу формул (8) и (10) $C_1 = D_1$.

Воспользовавшись теоремой о степени унимодулярной матрицы [4], имеем

$$S^k = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{i\alpha}{2}\right) e^{-i\lambda_0 z_0} U_{k-1} - U_{k-2}, & -\frac{i\alpha}{2} e^{i\lambda_0 z_0} U_{k-1} \\ \frac{i\alpha}{2} e^{-i\lambda_0 z_0} U_{k-1}, & \left(1 - \frac{i\alpha}{2}\right) e^{i\lambda_0 z_0} U_{k-1} - U_{k-2} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $U_k = U_k(x)$ — полиномы Чебышева второго рода, $x = \cos \lambda_0 z_0 + (\alpha/2) \sin \lambda_0 z_0$,

Полагая в формуле (13) $k = N$ и воспользовавшись (14), получим два линейных неоднородных алгебраических уравнения относительно A_N и B_N:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{i\alpha}{2} P_1\right] A_N &= g P_2, \\ \frac{i\alpha}{2} P_3 A_N + B_N &= g P_4, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$P_1 = e^{i\lambda_0 z_N} \sum_{k=1}^{N} (U_{N-k} - e^{i\lambda_0 z_0} U_{N-k-1}) e^{-i\lambda_0 z_k},$$

$$P_2=\sum_{k=1}^{N}\left(U_{N-k}-e^{i\lambda_0 z_0}U_{N-k-1}\right)e^{i\frac{\omega}{v}z_k}, \tag{16}$$

а величины P_3 и P_4 получаются соответственно из P_1 и P_2 заменой $\exp(i\lambda_0 z_0)$ на $\exp(-i\lambda_0 z_0)$.

Из уравнений (15) сразу получаем явные выражения для величин A_N и B_N:

$$A_N=gP_2\Big/\left(1+\frac{i\alpha}{2}P_1\right),$$

$$B_N=g\left[P_4+\frac{i\alpha}{2}(P_1P_4-P_2P_3)\right]\Big/\left(1+\frac{i\alpha}{2}P_1\right). \tag{17}$$

Зная A_N, нетрудно с помощью формулы (13) найти A_m и B_m для произвольного m. Подставляя A_m и B_m в (9) и затем в (3), мы можем получить решение исходного интегрального уравнения (2).

3. Поля излучения

В конечном счете нас интересуют не Фурье-компоненты полей, а сами поля излучения

$$E_{\text{рас}}(\vec{r},\ t)=(2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{\text{рас}}(z)\exp\left[i(\vec{\varkappa}\vec{\rho}-\omega t)\right]d\vec{\varkappa}\,d\omega, \tag{18}$$

где

$$E_{\text{рас}}(z)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{\text{рас}}(\vec{\varkappa},\ k_z)\exp(ik_z z)\,dk_z. \tag{19}$$

Умножив формулу (2) на $(2\pi)^{-1}\exp(ik_z\cdot z)$ и проинтегрировав по k_z, получаем для поперечной компоненты поля

$$E_{\text{рас}}(z)=-\frac{\alpha i}{2}\sum_{n=1}^{N}\exp\left[i\lambda_0|z-z_n|\right]\cdot E_n. \tag{20}$$

В частности, для поля за пластиной $(z>z_N)$ имеем

$$E_{\text{рас}}(z)=-\frac{\alpha i}{2}\exp(i\lambda_0 z)\cdot B_N\exp(-i\lambda_0 z_N), \tag{21}$$

а для поля до пластины $(z<z_1)$

$$E_{\text{рас}}(z)=-\frac{\alpha i}{2}\exp(-i\lambda_0 z)\,A_N\exp(i\lambda_0 z_N). \tag{22}$$

Рассмотрим теперь подробнее поля излучения за кристаллической пластиной в направлении движения частицы.

Прежде всего заметим, что в случае выполнения условия

$$\lambda_0 z_0=k\pi\qquad (k\text{ — целое число}) \tag{23}$$

ход решения значительно упрощается. Действительно, в этом случае формула (7) примет вид

$$L_{mn} = \frac{\alpha i}{2} \exp\left[i(m-n)k\pi\right]. \tag{24}$$

Тогда уравнения (5) запишутся в виде

$$E_m + \frac{\alpha i}{2} e^{-i(N-m)k\pi} B_N = a_m, \tag{25}$$

где $B_N = \sum_{n=1}^{N} E_n \exp\left[i(N-n)k\pi\right]$. Умножив обе части равенства (25) на $\exp\left[i(N-m)k\pi\right]$ и просуммировав по m от 1 до N, получим

$$B_N = \sum_{m=1}^{N} a_m \exp\left[i(N-m)k\pi\right]/(1 + i\alpha N/2). \tag{26}$$

С учетом формул (6) и (21) имеем в рассматриваемом случае

$$E_{\text{рас}}(z) = -\frac{\alpha i}{2} g e^{i\lambda_0 z + i(N-1)b/2} \cdot \frac{\sin N\frac{b}{2}}{\sin\frac{b}{2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{i\alpha N}{2}}, \tag{27}$$

где $b = \left(\frac{\omega}{v} - \lambda_0\right) z_0$.

Условие (23) можно записать в виде $n\pi c/\omega = z_0 \cos\vartheta$ (где ϑ — угол между направлением излучения и осью z). Если ввести обычно используемый угол рассеяния $2\theta = \pi - 2\vartheta$, то видно, что это условие есть не что иное, как условие Брэгга для отражения рассеянных волн назад.

В общем случае для явного вычисления величины B_N по формуле (17) необходимо найти соответствующие суммы (16). Для этого воспользуемся известным представлением для полиномов Чебышева второго рода [5]

$$U_n(x) = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos x\right]}{(1-x^2)^{1/2}}. \tag{28}$$

Поскольку $x = \cos\lambda_0 z_0 + (\alpha\sin\lambda_0 z_0)/2$, а $|\alpha| \ll 1$, то функцию $\arccos x$ можно разложить в ряд по степеням α и ограничиться наинизшими членами, если

$$|\alpha \cdot \operatorname{ctg}\lambda_0 z_0| \ll 1. \tag{29}$$

В противном случае мы должны воспользоваться для функции $\arccos x$ другим приближенным выражением. Нетрудно видеть, что это происходит тогда, когда мы находимся вблизи частот Брэгга, удовлетворяющих условию (23).

Рассмотрим сначала случай, когда выполняется условие (29), т. е. вдали от частот Брэгга. В этом случае имеем

$$U_n(x) \approx \frac{\sin[(n+1)(\lambda_0 z_0 - \alpha/2)]}{\sin \lambda_0 z_0}. \tag{30}$$

При написании последней формулы мы считали, что

$$N\alpha^2 \ll 1. \tag{31}$$

Нетрудно видеть, что в интересующей нас области рентгеновских частот, это условие хорошо выполняется вплоть до кристаллов толщиной в 1 метр.

Вычислим суммы (16) с учетом формулы (30) и подставим их в (17). Затем с помощью формулы (21) найдем, что

$$E_{\text{рас}}(z) = -\frac{\alpha i}{2}\, g e^{i\lambda_0 z + iN(b-\alpha/2)/2} \frac{\sin\left[\frac{N}{2}\left(b+\frac{\alpha}{2}\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(b+\frac{\alpha}{2}\right)\right]}. \tag{32}$$

Подставив (32) в (18), можно получить выражение для полной излученной энергии, которое, однако, не будет учитывать поглощения излучения в самом кристалле. Из формул (7)—(9) работы [1] (при написании этих формул была предположена вещественность соответствующих волновых функций невозмущенной системы; см. например [2], стр. 108) следует, что учет поглощения рентгеновского излучения эффективно сводится к тому, что величина ω_0^2 должна быть заменена комплексной величиной $\omega_0^2 - 2ic\omega\mu$, где μ — коэффициент поглощения вещества по амплитуде поля в $см^{-1}$. С учетом этого обстоятельства получаем следующее выражение для числа квантов

$$N_{\text{кв}} = \frac{4}{137\pi} \times$$

$$\times \int \frac{[\omega_0^4 + (2c\omega\mu)^2]\, e^{-\mu l}\left\{\operatorname{ch} l\mu - \cos\left[l\omega\left(1-\beta^2+\vartheta^2+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)/2c\right]\right\}\vartheta^3\, d\vartheta\, d\omega}{\omega^5(1-\beta^2+\vartheta^2)^2[(1-\beta^2+\vartheta^2+\omega_0^2/\omega^2)^2 + (2c\mu/\omega)^2]}. \tag{33}$$

В этой формуле везде вместо $\omega_0^2/\cos\vartheta$ мы написали просто ω_0^2. Такая замена вполне оправдана, ибо угол $\vartheta \sim (1-\beta^2)^{1/2} \ll 1$, а там, где величина $\omega_0^2/\cos\vartheta$ находится в аргументе косинуса, можно воспользоваться этим приближением, если $l\omega_0^2(1-\beta^2)/8\omega c \ll 1$, что обычно выполняется в практически интересных случаях.

Сразу отметим, что полученная формула (33) для числа квантов в центральном пятне в точности совпадает с соответствующей формулой для переходного излучения на одной пластине, полученной в рамках макроскопической теории [6, 7]. Если $l\omega_0^2/2\omega c \ll 1$ (при этом обязательно $l\mu \ll 1$, так как в рассматриваемой области частот $2\omega c\mu/\omega_0^2 < 1$ [8]), то формула (33), как нетрудно видеть, с точностью до членов высших порядков малости совпадает с формулой (30) из [1], полученной методом итераций для тонких кристаллических пластин.

Теперь рассмотрим частоты, находящиеся вблизи частот Брэгга (23). Для этого положим

$$\lambda_0 z_0 = k\pi - \delta, \tag{34}$$

где $|\delta| \ll 1$. Тогда имеем

$$x = (-1)^k \left(\cos\delta - \frac{\alpha}{2}\sin\delta\right), \tag{35}$$

откуда получаем

$$U_n(x) = (-1)^{nk}\frac{\sin(n+1)y}{y}, \tag{36}$$

где

$$y = \sqrt{\alpha\delta + \delta^3}. \tag{37}$$

При получении формулы (36) мы ввели функцию $\cos y = \cos\delta - (\alpha/2)\sin\delta$ и разложили обе части равенства в ряд по степеням y и δ. Полученное уравнение решалось методом итераций относительно y и были оставлены главные члены, поскольку y, δ, α по модулю много меньше единицы. Оценивая отброшенные члены, мы приходим к выводу, что формула (36) имеет место при выполнении условия

$$\left|\frac{N\alpha^2\delta^2}{\sqrt{\alpha\delta + \delta^2}}\right| \ll 1.$$

Указанное условие слабее условия (31) как в случае $|\alpha| \ll |\delta| \ll 1$, так и в случае $|\delta| \ll |\alpha|$. В случае же $\delta = -\alpha'$ (где было положено $\alpha = \alpha' + i\alpha''$) это условие снова является более слабым чем (31), если учесть, что $|\alpha''/\alpha'| \sim 10^{-3}$ в интересующей нас области частот.

Для однозначного определения введенной выше величины $y = y' + iy''$ условимся считать $y'' < 0$. Тогда простой анализ показывает, что поскольку δ — величина действительная, а $\alpha'' < 0$, то $y'\delta \geqslant 0$.

Заметим сразу, что при $|\delta| \gg |\alpha|$ имеем $y = \delta + \alpha/2$. Учитывая формулу (34), нетрудно убедится, что в этом случае формулы (36) и (30) совпадают. Следовательно, число испущенных квантов выражается той же формулой (33), которая имела место вдали от частот Брэгга.

Используя формулу (36), можно явно вычислить суммы (16). Получим

$$P_{1,3} = \frac{e^{-i(N-1)\delta}}{2iy}\left\{\frac{y\pm\delta}{y-\delta}e^{iNy}\left(1-e^{-iN(y-\delta)}\right) - \frac{y\mp\delta}{y+\delta}e^{-iNy}\left(1-e^{iN(y+\delta)}\right)\right\},$$

$$P_{2,4} = \frac{(-1)^{n(N-1)}}{-2iy}\left\{\frac{(y\pm\delta)e^{iNy}\left(1-e^{iN(b-y-\delta)}\right)}{b-y-\delta} + \right.$$

$$\left. + \frac{(y\mp\delta)e^{-iNy}\left(1-e^{iN(b+y-\delta)}\right)}{b+y-\delta}\right\}. \tag{38}$$

При $\delta \to 0$ получаем

$$P_1 = P_3 = N,$$

$$P_2 = P_4 = i(-1)^{k(N-1)}\left(1-e^{iNb}\right)/b.$$

Тогда с помощью формул (17) и (21) легко получить выражение (27).

Из формул (38) видно, что при некотором конечном значении δ действительная часть одного из знаменателей выражений $P_{2,4}$ обращается в нуль и при этом поле излучения достигает максимума. Это происходит при выполнении равенства

$$b - y' - \delta = 0 \tag{39}$$

или, если учесть определение величины y, при

$$\delta = \delta_0 \equiv \frac{b^2}{2b + \alpha'}. \tag{40}$$

Кстати заметим, что уравнение $b + y' - \delta = 0$ не имеет решения.

Вблизи значения δ_0 сохраним в выражениях для $P_{2,4}$ только слагаемое со знаменателем $b - y - \delta$. Затем подставляя (38) в (17) и (21), получаем для излучения, испускаемого вперед по движению заряда,

$$E_{\text{рас}}(z) = \frac{\alpha^2 g \delta_0^2}{b} e^{i\lambda_0 z + iN\delta_0} \times$$

$$\times \frac{1 - e^{-iN[(\delta - \delta_0) + iy_0'']}}{[(\delta - \delta_0) + iy_0''][- b^2 e^{iN(b - \delta_0 + iy_0'')} + (b - 2\delta_0)^2 e^{-iN(b - \delta_0 + iy_0'')}]}, \tag{41}$$

где y_0'' — значение y'' при $\delta = \delta_0$. Пользуясь формулами (40) и (37), получаем, что

$$y_0'' = -\frac{\alpha'' b}{2(\alpha' + b)}. \tag{42}$$

Формула (41) дает острый максимум модуля величины $E_{\text{рас}}(z)$ при $\delta = \delta_0$ с шириной $\sim y_0''$. Значение $E_{\text{рас}}(z)$ в самом максимуме существенно зависит от величины $|Ny_0''|$. В случае $|Ny_0''| \ll 1$ имеем

$$E_{\text{рас}}(z)\Big|_{\delta=\delta_0} = \frac{-iNg\alpha^2\delta_0^2 e^{i\lambda_0 z + iN\delta_0}}{b[b^2 e^{iN(b-\delta_0)} - (b - 2\delta_0)^2 e^{-iN(b-\delta_0)}]}. \tag{43}$$

Если же $|Ny_0''| \gg 1$, то значение $E_{\text{рас}}(z)$ согласно формуле (41) экспоненциально мало. Однако это связано с тем, что при выводе формулы (41) мы отбросили в $P_{2,4}$ слагаемые со знаменателем $b + y - \delta$, которые при $|Ny_0''| \gg 1$ вносят главный вклад в $E_{\text{рас}}(z)$. Учитывая это обстоятельство и сохраняя указанные слагаемые, при $|Ny_0''| \gg 1$ из формул (38), (17) и (21) получаем

$$E_{\text{рас}}(z) = -\alpha g \delta \frac{e^{i\lambda_0 z + iNb}}{(y + \delta)(b + y - \delta)}. \tag{44}$$

Рассмотрим теперь излучение, испускаемое назад, т. е. противоположно направлению движения заряда. Обычно для ультрарелятивистских частиц излучение, испускаемое назад, мало [9]. В самом деле, вдали от частот Брэгга при помощи формулы (30) нетрудно получить, что $|P_2| \ll |P_4|$ и $|F_1| \ll |P_3|$. Отсюда и из (17) видно, что $|A_N| \ll |B_N|$, т. е. излучение назад много меньше излучения вперед.

Однако совершенно иначе обстоит дело вблизи частот Брэгга. Подставляя формулы (38) в (17) и (22), получаем для поля излучения назад

$$E_{\text{рас}}(z) = \frac{\alpha g \delta e^{-i\lambda_0 z + iNy}(y+\delta)\left(1-e^{iN(b-y-\delta)}\right)}{(b-y-\delta)\left[(y+\delta)^2 e^{iNy} - (y-\delta)^2 e^{-iNy}\right]}. \tag{45}$$

Из формулы (45) видно, что модуль величины $E_{\text{рас}}(z)$ имеет острый максимум при том же значении $\delta = \delta_0$, что и определяемом формулой (40). Ширина максимума имеет порядок y_0'', как и в случае излучения вперед. Что касается значения $E_{\text{рас}}(z)$ в максимуме, то при $|Ny_0''| \ll 1$

$$E_{\text{рас}}(z)\Big|_{\delta=\delta_0} = \frac{-iNg\alpha\delta_0 b\, e^{-i\lambda_0 z + iN(b-\delta_0)}}{b^2 e^{iN(b-\delta_0)} - (b-2\delta_0)^2 e^{-iN(b-\delta_0)}}, \tag{46}$$

а при $|Ny_0''| \gg 1$

$$E_{\text{рас}}(z)\Big|_{\delta=\delta_0} = \frac{ig\alpha b\, e^{-i\lambda_0 z}}{y_0''(2b+\alpha)}. \tag{47}$$

Любопытно заметить, что острые максимумы в излучениях как вперед, так и назад, возникают не точно при „кинематической“ частоте Брэгга, определяемой условием $\lambda_0 z_0 = k\pi$ (k — целое число), а при частоте, смещенной от нее в меньшую сторону на величину $\Delta\omega = \delta_0 k\pi c/z_0$, где δ_0 определяется формулой (40). Такая ситуация типична для динамической теории рассеяния рентгеновского излучения (см. напр. [10]). Частоту, определяемую условием $\lambda_0 z_0 = k\pi - \delta_0$, так же, как и в теории дифракции свободного рентгеновского излучения, естественно назвать „динамической“ частотой Брэгга. Однако следует заметить, что динамическая частота Брэгга для излучения, возникающего при прохождении ультрарелятивистской заряженной частицы через кристалл, зависит также от энергии частицы.

Величина поля излучения при динамической частоте Брэгга как вперед, так и назад, для не очень толстого кристалла ($Ny_0'' < 1$), как видно из формул (43) и (46), имеет одинаковый знаменатель $b^2 \exp[iN(b-\delta_0)] - (b-2\delta_0)^2 \exp[-iN\cdot(b-\delta_0)]$, модуль которого имеет вид

$$[b^4 + (b-2\delta_0)^4 - 2b^2(b-2\delta_0)^2 \cos 2N(b-\delta_0)]^{1/2},$$

т. е. периодически зависит от числа N или толщины кристаллической пластины $l = Nz_0$. Период этой зависимости равен $\pi/(b-\delta_0)$ или $\pi(2b+\alpha')/b(b+\alpha')$.

Что касается ширины максимума при динамической частоте Брэгга, то как было указано выше, относительная ширина имеет порядок y_0'', а абсолютная ширина в частотном спектре имеет порядок $y_0'' k\pi c/z_0$, т. е. весьма мала. Однако это относится к спектру при данном угле излучения ϑ. Если же рассматривать частотный спектр, проинтегрированный по всем углам ϑ в центральном пятне (от нуля до величины ϑ_{max} порядка $(1-\beta^2)^{1/2}$), то ширина максимума в таком интегральном частотном спектре уже определяется величиной, большей из двух: $y_0'' k\pi c/z_0$ и $(1-\beta^2)\, k\pi c/z_0$. Это следует из того, что сама динамическая частота Брэгга (между прочим, как и кинематическая), при которой имеет место максимум, зависит от угла ϑ и имеет относительный разброс порядка ϑ^2_{max}.

Следует еще раз указать, что все результаты, полученные выше, относятся к модели кристалла, состоящего из точечных и неподвижных атомов. В модели кристалла, состоящего из реальных атомов, имеющих конечные размеры, основные качественные черты сохраняются, но количественные соотношения могут быть несколько иными.

В заключение отметим, что метод интегрального уравнения (1), примененный в настоящей работе, если можно найти в явном виде его решение, имеет то преимущество, что не требует выделения „сильных волн" и сшивки полей на границах. С другой стороны, рассеяние свободного рентгеновского излучения в кристаллах описывается динамической теорией (см. напр. [2, 10]), использующей сшивку полей на границах и приближение двух сильных волн. К решению задачи, рассматриваемой в данной статье, можно подойти, используя и это приближение.

Авторы выражают свою признательность А. Ц. Аматуни и М. Р. Магомедову за обсуждения в процессе выполнения работы, Ю. М. Кагану и А. М. Афанасьеву за весьма полезные советы и за ознакомление с результатами своих расчетов до их опубликования.

Ереванский физический институт Поступила 24.II.1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. М. Гарибян, Ян Ши*, ЖЭТФ, 61, 930 (1971).
2. *Р. Джеймс*, Оптические принципы диффракции рентгеновских лучей, М., 1950.
3. *М. Р. Магомедов, М. М. Мурадян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 7, 178 (1972).
4. *F. Abeles*, Ann. de Physique, 5, 596, 706 (1950); см. также *М. Борн, Э. Вольф*, Основы оптики, М., 1970 (стр. 92).
5. *Д. С. Кузнецов*, Специальные функции, М., 1965, стр. 209.
6. *В. Е. Пафомов*, ЖЭТФ, 33, 1074 (1957); *Г. М. Гарибян, Г. А. Чаликян*, ЖЭТФ, 35, 1282 (1958).
7. *Г. М. Гарибян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 6, 3 (1971).
8. *О. И. Лейпунский, Б. В. Новожилов, В. Н. Сахаров*, Распространение гамма-квантов в веществе, М., 1960.
9. *Г. М. Гарибян*, Труды международной конференции по аппаратуре в физике высоких энергий, Дубна, том 2, стр. 509.

10 *W. H. Zachariasen*, Theory of X-Ray Diffraction in Crystals, New York (1967).

ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ԿԱՄԱՎՈՐ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ԲՅՈՒՐԵՂՈՒՄ

Գ. Մ. ՂԱՐԻԲՅԱՆ, Մ. Մ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ, ՅԱՆ ՇԻ

Ստացված է միկրոսկոպիկ տեսության հիմնական ինտեգրալ հավասարման լուծումը, որը որոշում է կամավոր հաստության բյուրեղում հավասարաչափ շարժվող լիցքավորված մասնիկի ճառագայթման դաշտը։ Ցույց է տրված, որ կետային անշարժ ատոմների մոդելի դեպքում լուծումը ճառագայթման կենտրոնական բնում համընկնում է մակրոսկոպիկ տեսությունից հետևող լուծման հետ, բացի այն հաճախությունների, որոնք բավարարում են Բրեգգի պայմանին։ Այդ հաճախությունների շրջակայքում ինտենսիվության բանաձևերը առաջ և հետ ճառագայթման համար խիստ տարբերվում են բյուրեղային կառուցվածքը հաշվի չառնող մակրոսկոպիկ տեսության բանաձևերից։ Տարբերությունը կայանում է նրանում, որ Բրեգգի հաճախությունների շրջակայքում առաջանում են բարձր և նեղ մաքսիմումներ, ինչպիսիք կան ազատ ռենտգենյան ճառագայթների ցրման դինամիկ տեսության մեջ։ Ստացված լուծման մեջ հաշվի է առնված ճառագայթման կլանումը բյուրեղում։

THE RADIATION OF UNIFORMLY MOVING CHARGED PARTICLE IN A CRYSTAL OF ARBITRARY THICKNESS

G. M. GARIBIAN, M. M. MURADIAN, C. YANG

The solution of the fundamental integral equation of microscopic theory defining a radiation field generated by charge particle at its uniform motion through a crystal of arbitrary thickness is obtained. The solution in the model of fixed point-atoms is shown to formally coincide in a central spot of the radiation with that resulting from the macroscopic theory excepting the frequencics obeying Bragg condition. In the vicinity of these frequencies very narrow and high maxima appear, analogous to those that appear near by the Bragg frequencies in the dynamical theory of a scattering of free X-rays. The solution obtained takes also account of the radiation absorption in a crystal.