

ФУНКЦИЯ ГРИНА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

М. Р. МАГОМЕДОВ, М. М. МУРАДЯН

В работе методом функции Грина получены решения уравнений Максвелла в диспергирующих слоистых средах для произвольного распределения внешних источников поля. Отдельно рассмотрен наиболее важный для приложений частный случай — периодические слоистые среды с произвольной периодичностью. Все результаты представлены в виде, удобном для применений. В качестве примера рассмотрен перпендикулярный пролет равномерно движущейся заряженной частицы через слоистую среду и через периодическую слоистую структуру с произвольной периодичностью.

Задача о построении решений уравнений Максвелла в диспергирующих средах с плоской границей раздела для произвольного распределения источников поля впервые была рассмотрена в работах [1, 2]. Авторы, однако, ограничились рассмотрением случая, когда плотность тока нормальна к границе раздела сред. Позже в работе [3] эти решения были обобщены на случай произвольного движения заряженных частиц. Аналогичная задача для двух диспергирующих сред со сферической границей раздела была решена в работе [4]. Вычислению полей излучения произвольно движущейся заряженной частицы в слоистых средах с плоскими границами раздела посвящены работы [5, 6], где задача решается методом изображений. Сложными и растянутыми вычислениями автором были получены выражения для полей в волновой зоне. Громоздкость полученных выражений затрудняет их использование в конкретных случаях.

В настоящей работе методом функции Грина получены точные решения уравнений Максвелла в слоистых средах для произвольно движущихся заряженных частиц. Все результаты представлены в виде, удобном для применений.

1. Функция Грина для векторного волнового уравнения

Электромагнитные поля, создаваемые произвольным распределением внешних источников в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} J(r, t), \\ \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho(r, t),\end{aligned}\quad (1)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A},$$

где на потенциалы наложено условие Лоренца

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

позволяющее исключить из рассмотрения скалярный потенциал Φ . По этому в дальнейшем мы будем интересоваться только уравнением для вектор-потенциала $\mathbf{A}$. Разлагая $\mathbf{A}$ в интеграл Фурье по времени, будем иметь

$$(\Delta + k^2) \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3)$$

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega).$$

Запаздывающее решение уравнения (3), удовлетворяющее нулевым граничным условиям на бесконечности, как известно, записывается в виде

$$A_i(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int J_i(\mathbf{r}', \omega) G_{ii}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) d\mathbf{r}', \quad (4)$$

где по i идет суммирование, а $G_{ii}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k)$ являются компонентами тензорной функции Грина, удовлетворяющими уравнению

$$(\Delta + k^2) G_{ii} = -4\pi \delta_{ii} \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5)$$

Здесь δ_{ii} есть символ Кронекера. Решение этого уравнения является симметричным тензором и удовлетворяет условию взаимности

$$G_{ii}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) = G_{ii}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}|k). \quad (6)$$

В случае одной бесконечной изотропной среды тензор G кратен единичному и с учетом запоздывания его можно записать следующим образом:

$$G_{ii}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) = \delta_{ii} \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{i}{2\pi} \delta_{ii} \int e^{izq + i\lambda|z-z'|} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (7)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, z, q — компоненты $\mathbf{k}, \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ в плоскости xy , $\lambda = +\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k^2}$, $\text{Im} \lambda > 0$. В случае слоистых сред с неоднородностью вдоль оси z функцию G будем искать в виде

$$G_{ii}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'|k) = \frac{i}{2\pi} \int e^{izq} g_{ii}(z, z') d\lambda, \quad (8)$$

где тензор $g_{ii}(z, z')$, как показано в работе [3], представляет собой матрицу

$$g(z, z') = \begin{vmatrix} g_{\perp} + (g_{\parallel} - g_{\perp}) \frac{k_x^2}{x^2} & (g_{\parallel} - g_{\perp}) \frac{k_x k_y}{x^2} & 0 \\ (g_{\perp} - g_{\parallel}) \frac{k_x k_y}{x^2} & g_{\perp} + (g_{\parallel} - g_{\perp}) \frac{k_y^2}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & g_{\parallel} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Здесь $g_{\perp}$, $g_{\parallel}$ — некоторые функции от z и z' , симметричные по этим переменным.

Подставляя (8) в (4), имеем

$$A(r, \omega) = A_{\perp}(r, \omega) + A_{\parallel}(r, \omega),$$

$$A_{\perp} = \frac{i}{2\pi c} \int dr' \int d\vec{x} e^{i\vec{x} \cdot \vec{r}} \frac{[x [J_t(r', \omega) x]]}{x^2} g_{\perp}(z, z'), \quad (10)$$

$$A_{\parallel} = \frac{i}{2\pi c} \int dr \int d\vec{x} e^{i\vec{x} \cdot \vec{r}} \left(J(r', t) - \frac{[x [J_t(r', \omega) x]]}{x^2} \right) g_{\parallel}(z, z').$$

Здесь $J_t(r, \omega)$ — компонента $J(r, \omega)$ в плоскости xy . Таким образом, для определения тензора G_{ij} в случае слоистых сред необходимо построить два скаляра $g_{\perp}$ и $g_{\parallel}$.

2. Построение функций $g_{\perp}(z, z')$ и $g_{\parallel}(z, z')$ в слоистых средах

Пусть имеется слоистая среда, состоящая из $N+2$ плоских слоев с различными диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_k(\omega)$ и толщинами a_k , где $k=0, 1, \dots, N+1$ и $a_0 = a_{N+1} = \infty$. Направим ось z по нормали к границам раздела сред в направлении возрастания нумерации и поместим начало координат на первой границе. Координаты границ обозначим через b_k , причем, $a_k \equiv b_k - b_{k-1}$, $b_{-1} = -\infty$, $b_0 = 0$, $b_{N+1} = \infty$.

Для построения $g_{\perp}$ и $g_{\parallel}$ воспользуемся методом, изложенным в [3]. Пусть источник и наблюдатель находятся в m -ой полосе, т. е. $b_{m-1} < z', z < b_m$.

При этом функция Грина G должна иметь сингулярность типа $1/R$ при $r \rightarrow r'$. Из формулы (7) очевидно, что такое поведение G обеспечивается выражением

$$f_m(z') f_k(z) \frac{e^{i\lambda_k |z-z'|}}{\lambda_k} \delta_{mk}, \quad \lambda_k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_k - x^2}, \quad (11)$$

для $g_{\perp}$ и $g_{\parallel}$. Здесь через $f_m(x)$ обозначена функция, которая равна единице в m -ом слое и нулю вне этого слоя, δ_{mk} — символ Кронекера.

Чтобы определить $g_{\perp}$ и $g_{\parallel}$ во всем пространстве и учесть граничные эффекты, добавим к (11) общее выражение

$$f_m(z') f_k(z) \left\{ \frac{e^{-i\lambda_k z - i\lambda_m z'}}{\lambda_k} R_{mk} + \frac{e^{i\lambda_k z - i\lambda_m z'}}{\lambda_k} B_{mk} + \right. \\ \left. + \frac{e^{i\lambda_k z + i\lambda_m z'}}{\lambda_k} R_{mk}^+ + \frac{e^{-i\lambda_k z + i\lambda_m z'}}{\lambda_k} B_{mk}^+ \right\}, \quad (12)$$

построенное из произведений экспонент $e^{\pm i\lambda_k z}$ и $e^{\pm i\lambda_m z'}$ со всевозможными знаками фаз. Очевидно, что при подстановке этого выражения в (8) мы получим выражение, не имеющее сингулярностей при $g \rightarrow g'$. Здесь R_{mk} , B_{mk} , R_{mk}^+ , B_{mk}^+ — неизвестные постоянные.

Для получения $g_{\perp}$ и $g_{\parallel}$ при всех z и z' (а не только при $b_{m-1} < z' < b_m$, $b_{k-1} < z < b_k$) необходимо просуммировать выражения (11) и (12) по всем m и k от 0 до $N+1$.

Окончательно имеем

$$g_{\perp}(z, z') = \sum_{m=0}^{N+1} \sum_{k=0}^{N+1} f_m(z') f_k(z) \left\{ \frac{e^{i\lambda_k |z-z'|}}{\lambda_k} \delta_{mk} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-i\lambda_k z - i\lambda_m z'}}{\lambda_k} R_{mk}(1) + \frac{e^{i\lambda_k z - i\lambda_m z'}}{\lambda_k} B_{mk}(1) + \right. \\ \left. + \frac{e^{i\lambda_k z + i\lambda_m z'}}{\lambda_k} R_{mk}^+(1) + \frac{e^{-i\lambda_k z + i\lambda_m z'}}{\lambda_k} B_{mk}^+(1) \right\}. \quad (13)$$

Что касается $g_{\parallel}$, то для упрощения дальнейшего изложения напомним его в несколько ином виде

$$g_{\parallel}(z, z') = \sum_{m=0}^{N+1} \sum_{k=0}^{N+1} f_m(z') f_k(z) \left\{ \frac{e^{i\lambda_k |z-z'|}}{\lambda_k} \delta_{mk} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-i\lambda_k z - i\lambda_m z'}}{\lambda_k} \frac{x^2 J_z(-\lambda_m) - \lambda_m \kappa J(-\lambda_m)}{x^2 J_z(-\lambda_m) + \lambda_k \kappa J(-\lambda_m)} R_{mk}(2) + \right. \\ \left. + \frac{e^{i\lambda_k z - i\lambda_m z'}}{\lambda_k} \frac{x^2 J_z(-\lambda_m) - \lambda_m \kappa J(-\lambda_m)}{x^2 J_z(-\lambda_m) - \lambda_k \kappa J(-\lambda_m)} B_{mk}(2) + \right. \\ \left. + \frac{e^{i\lambda_k z + i\lambda_m z'}}{\lambda_k} \frac{x^2 J_z(\lambda_m) + \lambda_m \kappa J(\lambda_m)}{x^2 J_z(\lambda_m) - \lambda_k \kappa J(\lambda_m)} R_{mk}^+(2) + \right. \\ \left. + \frac{e^{-i\lambda_k z + i\lambda_m z'}}{\lambda_k} \frac{x^2 J_z(\lambda_m) + \lambda_m \kappa J(\lambda_m)}{x^2 J_z(\lambda_m) + \lambda_k \kappa J(\lambda_m)} B_{mk}^+(2) \right\}, \quad (14)$$

где

$$J(\pm \lambda_m) = \int f_m(z') J(\vec{r}', \omega) e^{-i \vec{z} \cdot \vec{p}' \pm i \lambda_m z'} d\vec{r}'. \quad (15)$$

Неопределенные коэффициенты $R_{mk}(a)$, $B_{mk}(a)$, $R_{mk}^+(a)$, $B_{mk}^+(a)$, где $a = 1, 2$, входящие в выражения (13) и (14), определяются из условия непрерывности тангенциальных составляющих полей E и H на границах раздела сред. Эти условия должны выполняться при любом фикс-

сированном m одновременно на всех границах для пар $R_{mk}(a)$, $B_{mk}(a)$ и $R_{mk}^+(a)$, $B_{mk}^+(a)$ в отдельности, поскольку они входят в (13) и (14) как коэффициенты при независимых функциях $e^{-i\lambda_m z'}$ и $e^{i\lambda_m z'}$. Из условия присутствия на бесконечности только расходящихся волн (принцип излучения) получаем граничные значения этих коэффициентов

$$R_{mN+1}(a) = B_{m0}(a) = R_{m0}^+(a) = B_{mN+1}^+ = 0. \quad (16)$$

Подставляя выражения (13) и (14) в (10) и приравнявая граничные значения тангенциальных составляющих полей E и H слева от границы b_k их значениям справа, можно получить уравнения, которые, совместно с условиями (16), полностью определяют все неизвестные коэффициенты. Для определения $R_{mk}(a)$ и $B_{mk}(a)$ имеем уравнения

$$p_{k+1,k}(a) A_{k+1}(a) = S^k(a) A_k(a) + C_k(a) \delta_{mk}, \quad (17)$$

где

$$A_k(a) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_k b_k} R_{mk}(a) \\ e^{i\lambda_k b_k} B_{mk}(a) \end{pmatrix}, \quad S^k = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_{k+1,k}} r_{k+1,k}(a) e^{-i\varphi_{k+1,k}} \\ r_{k+1,k}(a) e^{i\varphi_{k+1,k}} e^{i\varphi_{k+1,k}} \end{pmatrix},$$

$$r_{k+1,k}(1) = \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1} + \lambda_k}, \quad r_{k+1,k}(2) = \frac{\varepsilon_k \lambda_{k+1} - \varepsilon_{k+1} \lambda_k}{\varepsilon_k \lambda_{k+1} + \varepsilon_{k+1} \lambda_k},$$

$$p_{k+1,k}(1) = \frac{2\lambda_k}{\lambda_{k+1} + \lambda_k}, \quad p_{k+1,k}(2) = \frac{2\varepsilon_k \lambda_k}{\varepsilon_k \lambda_{k+1} + \varepsilon_{k+1} \lambda_k}, \quad (18)$$

$$C_k(a) = \begin{pmatrix} r_{k+1,k}(a) e^{-i\varphi_{k+1,k}} \\ e^{i\varphi_{k+1,k}} \end{pmatrix} e^{i\lambda_k b_k}, \quad \varphi_k = \lambda_k a_k,$$

$k = 0, 1, \dots, N$, m — фиксированное число.

Решение двучленных матричных рекуррентных соотношений (17) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} R_{mk}(a) &= - \frac{S_{-1,1}^{N+1,m}(a) S_{-1,-1}^{k,0}(a)}{S_{-1,-1}^{N+1,0}(a)} \prod_{j=k}^{m-1} p_{j+1,j}(a) e^{i\lambda_m b_m + i\lambda_k b_k} \\ B_{mk}(a) &= - \frac{S_{-1,1}^{N+1,m}(a) S_{1,-1}^{k,0}(a)}{S_{-1,-1}^{N+1,0}(a)} \prod_{j=k}^{m-1} p_{j+1,j}(a) e^{i\lambda_m b_m - i\lambda_k b_k} \end{aligned} \right\} k \leq m, \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{mk}(a) &= - \frac{S_{-1,1}^{N+1,k}(a) S_{-1,-1}^{m,0}(a)}{S_{-1,-1}^{N+1,-1}(a)} \prod_{j=m}^{k-1} p_{j,j+1}(a) e^{i\lambda_m b_m + i\lambda_k b_k} \\ B_{mk}(a) &= \frac{S_{-1,1}^{N+1,k}(a) S_{1,-1}^{m,0}(a)}{S_{-1,-1}^{N+1,-1}(a)} \prod_{j=m}^{k-1} p_{j,j+1}(a) e^{i\lambda_m b_m - i\lambda_k b_k} \end{aligned} \right\} k \geq m+1,$$

где

$$S^{k,m}(a) = S^{k-1}(a) S^{k-2}(a) \dots S^m(a), \quad S^{m+1,m}(a) = S^m(a)$$

и по определению $S^{m,m}(a) = I$, I — единичная матрица,

$$\prod_{j=1}^m x_j = 1 \text{ при } m < l, \quad S = \begin{pmatrix} S_{-1, -1} & S_{-1, 1} \\ S_{1, -1} & S_{1, 1} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом для $R_{mk}^+(a)$ и $B_{mk}^+(a)$ получаем выражения

$$\left. \begin{aligned} R_{mk}^+(a) &= \frac{S_{-1, -1}^{N+1, m}(a) S_{-1, 1}^{k, 0}(a)}{S_{-1, -1}^{N+1, 0}(a)} \prod_{j=k}^{m-1} p_{j+1, j}(a) e^{-i\lambda_m b_m - i\lambda_k b_k} \\ B_{mk}^+(a) &= \frac{S_{-1, -1}^{N+1, m}(a) S_{-1, -1}^{k, 0}(a)}{S_{-1, -1}^{N+1, 0}(a)} \prod_{j=k}^{m-1} p_{j+1, j}(a) e^{-i\lambda_m b_m + i\lambda_k b_k} \end{aligned} \right\} k \leq m-1,$$

$$\left. \begin{aligned} R_{mk}^+(a) &= \frac{S_{-1, -1}^{N+1, k}(a) S_{1, -1}^{m, 0}(a)}{S_{-1, -1}^{N+1, 0}(a)} \prod_{j=m}^{k-1} p_{j, j+1}(a) e^{-i\lambda_m b_m - i\lambda_k b_k} \\ B_{mk}^+(a) &= - \frac{S_{-1, 1}^{N+1, k}(a) S_{1, -1}^{m, 0}(a)}{S_{-1, -1}^{N+1, 0}(a)} \prod_{j=m}^{k-1} p_{j, j+1}(a) e^{-i\lambda_m b_m + i\lambda_k b_k} \end{aligned} \right\} k \geq m.$$

Как легко видеть из формул (19) и (20), между всеми коэффициентами существуют соотношения

$$\begin{aligned} R_{mk}(1) &= \frac{\lambda_k}{\lambda_m} R_{km}(1), \quad R_{mk}^+(1) = \frac{\lambda_k}{\lambda_m} R_{km}^+(1), \\ B_{mk}(1) &= \frac{\lambda_k}{\lambda_m} B_{km}^+(1), \quad B_{mk}(2) = \frac{\varepsilon_k \lambda_k}{\varepsilon_m \lambda_m} B_{km}^+(2), \\ R_{mk}(2) &= \frac{\varepsilon_k \lambda_k}{\varepsilon_m \lambda_m} R_{km}(2), \quad R_{mk}^+(2) = \frac{\varepsilon_k \lambda_k}{\varepsilon_m \lambda_m} R_{km}^+(2), \end{aligned} \quad (21)$$

которые являются непосредственным следствием симметричности функций (13) и (14) относительно переменных z и z' и могли быть написаны заранее исходя из этого факта.

Перейдем теперь к вычислению элементов матрицы

$$S^{k, m}(a) = S^{k-1}(a) S^{k-2}(a) \dots S^m(a)$$

при $k \geq m$. Из определения (18) матрицы $S^k(a)$ легко видеть, что ее элементы могут быть представлены в виде

$$S_{l_j+1, l_j}^k(a) = e^{i l_j+1 \varphi_{j+1}} [(1 - r_{j+1, j}(a)) \delta_{l_j, l_j+1} + r_{j+1, j}(a)],$$

где $l_{j+1}, l_j = \pm 1$.

Поэтому для элементов $S^{k, m}(a)$ имеем результат

$$S_{l_l+1, l_m}^{k, m}(a) = \sum_{(l)=-1}^1 \prod_{j=m}^{k-1} e^{i l_j+1 \varphi_{j+1}} [(1 - r_{j+1, j}(a)) \delta_{l_l, l_j+1} + r_{j+1, j}(a)], \quad (22)$$

где (l) означает совокупность всех повторяющихся индексов $l_i, i \neq k, m$. Чтобы завершить рассмотрение общих вопросов, приведем здесь полезные для применений представления функции $f_k(z)$, входящей в (13) и (14),

$$f_k(z) = \vartheta(z - b_{k-1}) \vartheta(b_k - z) = \vartheta(z - b_{k-1}) - \vartheta(z - b_k) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(z-b_{k-1})\tau} - e^{i(z-b_k)\tau}}{\tau - i\delta} d\tau,$$

где $\vartheta(x)$ равна единице при $x > 0$ и нулю при $x < 0$, а δ стремится к нулю, оставаясь положительной. Полученные в этом разделе результаты полностью решают задачу о построении функции Грина в слоистых средах.

Рассмотрим теперь отдельно наиболее важный для приложений частный случай — периодические слоистые среды.

Пусть имеется периодическая слоистая среда, состоящая из q пластин, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга, причем, каждая пластина состоит из $p-1$ слоев с различными ε_j и a_j , где $j = 1, 2, \dots, p-1$. Обозначим расстояние между пластинами через a_p и пусть $\varepsilon_{kp} = \varepsilon_0$, $k = 0, 1, 2, \dots, q$. При этом $N+1 = pq$.

Поскольку при таком выборе структуры слоистой среды имеют место соотношения

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k - \left[\frac{k}{p}\right]p}, \quad S^k(a) = S^{k - \left[\frac{k}{p}\right]p}(a),$$

где $k = 0, 1, \dots, N+1$, а $\left[\frac{k}{p}\right]$ означает целую часть числа $\frac{k}{p}$, то для матрицы $S^{k,m}$ получаем выражение

$$S^{k,m}(a) = S^{k - \left[\frac{k}{p}\right]p, 0}(a) (S^{p,0}(a))^n S^{p, m - \left[\frac{m-1}{p}\right]p}(a), \quad (23)$$

$$n = \left[\frac{k}{p}\right] - \left[\frac{m-1}{p}\right] - 1.$$

Используя теорему об n -ой степени унимодулярной матрицы (см., напр. [7], стр. 92) имеем

$$S^{k,m}(a) = \Delta^n(a) S^{k - \left[\frac{k}{p}\right]p, 0}(a) \left(\frac{S^{p,0}(a)}{\Delta(a)} U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \right) \times \\ \times S^{p, m - \left[\frac{m-1}{p}\right]p}(a). \quad (24)$$

Здесь $U_n(x)$ означает полином Чебышева второго рода,

$$x = \frac{1}{2\Delta(a)} (S_{-1,0}^{p,0}(a) + S_{1,1}^{p,0}(a)), \quad \Delta(a) = \prod_{j=0}^{p-1} p_{j+1}(a).$$

В заключение в качестве примера найдем поля, создаваемые заряженной частицей, движущейся с постоянной скоростью v через N -слойную пластину по нормали к границам раздела. Поставляя в

(10) $J_z(r, t) = ev\delta(x)\delta(y)\delta(z-ut)$, $J_t(r, t) = 0$ и произведя элементарные преобразования, для вектор-потенциала в k -ом слое получим

$$A_{\parallel k}(r, \omega) = A_k^{\circ}(r, \omega) + A_k'(r, \omega) + A_k''(r, \omega),$$

$$A_{\perp}(r, \omega) = 0,$$

где

$$A^{\circ}(r, \omega) = \frac{e}{2\pi^2 c} \int \frac{e^{i\vec{x}\rho + i\frac{\omega}{v}z}}{\Lambda_k} d\vec{x},$$

$$A_k'(r, \omega) = \frac{e}{4\pi^2 c} \frac{\omega}{v} \int \frac{e^{i\vec{x}\rho + i\lambda_k(z-b_k)}}{\lambda_k S_{-1, -1}^{N+1, 0}(2)} (S_{-1, -1}^{k, 0}(2) A_k^N - S_{-1, -1}^{N+1, k}(2) D_0^{k-1}) d\vec{x}, \quad (25)$$

$$A_k''(r, \omega) = \frac{e}{4\pi^2 c} \frac{\omega}{v} \int \frac{e^{i\vec{x}\rho - i\lambda_k(z-b_k)}}{\lambda_k S_{-1, -1}^{N+1, 0}(2)} (S_{-1, -1}^{k, 0}(2) A_k^N + S_{-1, 1}^{N+1, k}(2) D_0^{k-1}) d\vec{x},$$

$$D_0^{k-1} = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_m \prod_{j=m}^{k-1} p_{j, j+1}(2) e^{i\frac{\omega}{v} b_m} (S_{-1, -1}^{m, 0}(2) \gamma_{m, m+1}^- + S_{-1, -1}^{m, 0}(2) \gamma_{m, m+1}^+),$$

$$A_k^N = \sum_{m=k}^N \lambda_{m+1} \prod_{j=k}^m p_{j+1, j}(2) e^{i\frac{\omega}{v} b_m} (S_{-1, -1}^{N+1, m+1}(2) \gamma_{m+1, m}^+ e^{-i\varphi_{m+1}} - S_{-1, 1}^{N+1, m+1}(2) \gamma_{m+1, m}^- e^{i\varphi_{m+1}}),$$

$$\gamma_{k, m}^{\pm} = \frac{-\frac{1}{\lambda_k} \pm \frac{v}{\omega}}{\Lambda_k} + \frac{\frac{\varepsilon_k}{\lambda_k \varepsilon_m} \mp \frac{v}{\omega}}{\Lambda_m}, \quad \Lambda_k = \frac{\omega^2}{v^2} - \lambda_k^2.$$

Эти выражения с точностью до обозначений совпадают с соответствующими формулами, полученными в работе [8].

В случае периодических сред, подставляя в (25) значения матричных элементов из формулы (24), получим для A' и A'' в слоях с $\varepsilon_{lq} = \varepsilon_0$, $l = 0, 1, \dots, q$ выражения

$$\begin{aligned} A_{\parallel l}'(r, \omega) = & \frac{e}{4\pi^2 c} \frac{\omega}{v} \int d\vec{x} \frac{e^{i\vec{x}\rho + i\lambda_0(z-lb_p)}}{\lambda_0 M_q S_{-1, -1}^{p, 0}(2)} \times \\ & \times \left\{ \frac{S_{-1, -1}^{p, 0}(2) A_0^{p-1}}{\Delta(2)} \left[M_{q-l} \sum_{m=0}^{l-1} U_{m-1}(x) e^{i\frac{\omega}{v} mb_p} + \right. \right. \\ & + U_{l-1}(x) \sum_{m=l}^{q-1} M_{q-m} e^{i\frac{\omega}{v} mb_p} \left. \right] - D_0^{p-1} \left[M_{q-l} \sum_{m=0}^{l-1} M_{m+1} e^{i\frac{\omega}{v} mb_p} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{S_{-1, 1}^{p, 0}(2) S_{-1, -1}^{p, 0}(2)}{\Delta^2(2)} U_{l-1}(x) \sum_{m=l+1}^{q-1} U_{q-l-m}(x) e^{i\frac{\omega}{v} (m-1)b_p} \right] \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{ll}(r, \omega) = & \frac{e}{4\pi^2 c} \frac{\omega}{v} \int d\mathbf{x} \frac{e^{i\mathbf{x}\mathbf{p} - i\lambda_0(z-lb_p)}}{\lambda_0 M_q S_{-1, -1}^{p, 0}(2)} \left\{ \frac{S_{-1, 1}^{p, 0}(2) D_0^{p-1}}{\Delta(2)} \times \right. \\
 & \times \left[U_{q-1-l}(x) \sum_{m=0}^{l-1} M_{m+1} e^{i\frac{\omega}{v} mb_p} + M_l \sum_{m=l+1}^{q-1} U_{q-1-m}(x) e^{i\frac{\omega}{v}(m-1)b_p} \right] + \\
 & + A_0^{p-1} \left[M_l \sum_{m=l}^{q-1} M_{q-m} e^{i\frac{\omega}{v} mb_p} - \frac{S_{-1, 1}^{p, 0}(2) S_{l, -1}^{p, 0}(2)}{\Delta^2(2)} \times \right. \\
 & \left. \left. \times U_{q-l-1}(x) \sum_{m=1}^{l-1} U_{m-1}(x) e^{i\frac{\omega}{v} mb_p} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 M_k &= \frac{S_{-1, -1}^{p, 0}(2)}{\Delta(2)} U_{k-1}(x) - U_{k-2}(x), \\
 b_p &= \sum_{j=1}^p a_j.
 \end{aligned}$$

При $p=2$, $\varepsilon_0=1$ выражения (26) с точностью до обозначений совпадают с результатами работы [9].

Авторы выражают глубокую признательность Г. М. Гарибяну за полезные советы и обсуждения, а также С. С. Элбакяну за дискуссии.

Ереванский физический институт

Поступила 5.II.1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Гарибян, М. Р. Магомедов, ДАН АрмССР, 36, 77 (1963).
2. М. Р. Магомедов, ДАН АрмССР, 36, 157 (1963).
3. М. Р. Магомедов, Изв. АН АрмССР, Физика, 2, 170 (1967).
4. М. Р. Магомедов, Изв. АН АрмССР, Физика, 4, 271 (1969).
5. В. Е. Пафолов, Препринт ФИАН, № 31, 1966.
6. В. Е. Пафолов, Изв. вузов, Радиофизика, 10, 240 (1967).
7. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, Изд. Наука, 1970.
8. Г. М. Гарибян, М. М. Мурадян, Изв. АН АрмССР, Физика, 3, 104 (1968).
9. В. А. Аракелян, Г. М. Гарибян, Изв. АН АрмССР, Физика, 4, 339 (1969).

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՄԱՔՍՎԵԼԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԴՐԻՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ

Մ. Բ. ՄԱԳՈՄԵԴՈՎ, Մ. Մ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Աշխատանքում Գրինի ֆունկցիաների մեթոդով ստացված է Մաքսվելի հավասարումների լուծումը դիսպերսիոն շերտավոր միջավայրերում դաշտերի արտաքին աղբյուրների կամավոր բաշխման դեպքում:

GREEN FUNCTION FOR THE MAXWELL EQUATIONS
IN A LAMINATED MEDIA

M. R. MAGOMEDOV, M. M. MURADIAN

The solution of Maxwell equations in a laminated media for arbitrarily distributed external sources is obtained by Green function method. The case of periodical laminated media is considered in detail as the most important for applications. All the results are represented in a form convenient for application. As an example we calculated fields, produced in the normal passage of a uniformly moving charged particle through the laminated media as well as the periodical laminated media of an arbitrary periodicity.