

КОЛЬЦЕВОЙ ВОЛНОВОД В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В. А. БАРЕГАМЯН

Рассмотрено распространение симметричных электрических и магнитных волн в кольцевом волноводе, погруженном в анизотропную среду. Тензор диэлектрической проницаемости такой среды считается диагональным и имеет два различных элемента. Получены дисперсионные уравнения обоих типов волн, которые исследованы в частных случаях.

Как в [1], кольцевым волноводом называем систему, состоящую из металлических цилиндров радиуса a , длиной $l - d$, расположенных на одной оси с периодом l . Считается, что металл цилиндров бесконечно тонкий и идеально проводящий и волновод имеет бесконечную длину.

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в кольцевом волноводе, погруженном в безграничную анизотропную среду, являющуюся одноосным кристаллом. Тензор диэлектрической проницаемости имеет следующую форму

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь мы используем цилиндрическую систему координат r, φ, z , полагая, что ось кольцевого волновода совпадает с осью z . Начало координат поместим в середине щели. В выбранной нами системе координат компоненты диэлектрической проницаемости имеют вид

$$\epsilon_{rr} = \epsilon_{\varphi\varphi} = \epsilon_0, \quad \epsilon_{zz} = \epsilon_z.$$

Остальные компоненты отсутствуют.

Для общности рассмотрения предполагаем, что волновод заполнен диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 . Рассмотрим распространение аксиально-симметричных электромагнитных волн. В этом случае, когда $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$, электрические и магнитные волны разделяются.

Решая уравнения Максвелла для аксиально-симметричных магнитных и электрических волн с соответствующими граничными условиями, получим закономерности распространения этих волн в кольцевом волноводе, помещенном в анизотропную среду.

Компоненты электромагнитных волн в общем виде можем записать как

$$f(r, z, t) = \sum_n f_n(r) e^{i n z} e^{-i \omega t}. \quad (2)$$

Здесь учитывается периодичность структуры по оси z , $\gamma_n = \beta_0 + \frac{2\pi n}{l}$, n — номер пространственных гармоник, l — период структуры.

Для амплитуд Фурье-компонент аксиально-симметричных магнитных и электрических волн имеют место соответственно следующие волновые уравнения:

$$\frac{d^2 H_{zn1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH_{zn1}}{dr} + \left(\epsilon_0 k_0^2 - \gamma_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) H_{zn1} = 0 \quad (3)$$

и

$$\frac{d^2 E_{zn1}}{dr^2} + \frac{1}{c} \frac{dE_{zn1}}{dr} + \left(\epsilon_0 k_0^2 - \frac{\epsilon_e}{\epsilon_0} \gamma_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) E_{zn1} = 0, \quad (4)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$, ω — частота электромагнитной волны, c — скорость света. Индекс „1“ у компоненты показывает, что уравнения относятся к первой, то есть анизотропной среде, окружающей волновод.

Волновые уравнения магнитных и электрических волн для внутренней части волновода совпадают с (3) и (4), только в них заменяем ϵ_0 и ϵ_e на ϵ_2 .

Для внутренней части волновода решения ищем в виде: для волн электрического типа

$$E_{zn2} = a_n \Gamma_{2n}^2 J_0(\Gamma_{n2} r), \quad (5)$$

для волн магнитного типа

$$H_{zn2} = b_n \Gamma_{n2}^2 J_0(\Gamma_{n2} r). \quad (6)$$

Вне волновода имеем решения

$$E_{zn1} = c_n \Gamma_{n0}^{(2)} H_0^{(1)}(\Gamma_{ne} r), \quad (7)$$

$$H_{zn1} = d_n \Gamma_{n0}^2 H_0^{(1)}(\Gamma_{n0} r), \quad (8)$$

где J_0 и $H_0^{(1)}$ функции Бесселя и Ханкеля первого рода, а

$$\Gamma_{n2} = \sqrt{\epsilon_2 k_0^2 - \gamma_n^2}; \quad \Gamma_{n0} = \sqrt{\epsilon_0 k_0^2 - \gamma_n^2}; \quad \Gamma_{ne} = \sqrt{\epsilon_e k_0^2 - \frac{\epsilon_e}{\epsilon_0} \gamma_n^2}.$$

Остальные компоненты можно найти из уравнения Максвелла. Используя граничные условия в виде непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного поля на щелях и равенств нулю тангенциальных составляющих электрического поля при $r = a$, получим следующие соотношения между коэффициентами a_n , b_n , c_n , d_n :

$$c_n = \frac{\Gamma_{2n}^2}{\Gamma_{n0}^2} \cdot \frac{J_0(\Gamma_{n2} a)}{H_{n0}^{(1)}(\Gamma_{ne} a)} \cdot a_n; \quad d_n = \frac{\Gamma_{n2}}{\Gamma_{n0}} \cdot \frac{J_0^1(\Gamma_{n2} a)}{H_{n0}^{(1)'}(\Gamma_{n0} a)} b_n, \quad (9)$$

и систему уравнений для E -волн:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} Z_n e^{i\gamma_n z} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^E Z_n e^{i\gamma_n z} \quad (\text{на кольцах}), \quad (10)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n e^{i\gamma_n z} = 0 \quad (\text{на щелях})$$

с дополнительным условием

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{Z_m}{\nu+m} = 0.$$

Аналогичное уравнение получается для H -волн:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i\gamma_n z} = 0 \quad (\text{на кольцах}), \quad (11)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} X_n e^{i\gamma_n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^H X_n e^{i\gamma_n z}; \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{X_m}{\nu+m} = 0 \quad (\text{на щелях})$$

В выражениях (9)–(11) приняты следующие обозначения:

$$\nu = \frac{\beta_0 l}{2\pi}; \quad \kappa = \frac{k_0 l}{2\pi} = \frac{l}{\lambda_0}; \quad \theta_n = \frac{l}{2\pi} \Gamma_{n2} J_0(\Gamma_{n2} a) a_n; \quad T_n = \frac{l}{2\pi} \Gamma_{n2} b_n J'_0(\Gamma_{n2} a);$$

$$F_k(z) = \frac{H_k^{(1)'}(z)}{H_k^{(1)}(z)}; \quad f_k(z) = \frac{J'_k(z)}{J_k(z)}; \quad t_n = \varepsilon_2 f_0(\Gamma_{n2} a) - \varepsilon_0 \frac{\Gamma_{n2} \Gamma_{n0}}{\Gamma_{n0}^2} F_0(\Gamma_{n2} a);$$

$$Z_n = (\nu + n) t_n \theta_n; \quad X_n = (\nu + n) T_n; \quad \chi_n^{H, E} = 1 + \frac{|n|}{n} \xi_n^{H, E}; \quad (12)$$

$$\xi_n^H = \frac{1}{2} \frac{|\nu+n|}{\nu+n} \left[\frac{1}{f_0(\Gamma_{n2} a)} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \kappa^2}{(\nu+n)^2} - 1} - \frac{1}{F_0(\Gamma_{n0} a)} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \kappa^2}{(\nu+n)^2} - 1} \right];$$

$$\xi_n^E = \frac{|\nu+n|}{\nu+n} \cdot \frac{1}{t_n} (\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}) \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \kappa^2}{(\nu+n)^2} - 1}.$$

Используя метод Римана-Гильберта, приведенный в [1], решения системы уравнений (10) и (11) запишем в виде

$$Z_m \tilde{R}_\sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n^E \tilde{K}_n^m Z_n; \quad m = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots, \quad (13)$$

где коэффициенты $\tilde{R}_\sigma$ и K_m^n зависят от аргумента $\nu = -\cos \frac{\pi d}{l}$, а их выражения приведены в [2].

Решения систем уравнений для H -волн имеют вид

$$X_m \tilde{R}_\nu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n^H \tilde{K}_m^n X_n \quad m = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots, \quad (14)$$

где $\tilde{R}_\sigma$ и K_m^n зависят от аргумента $u = \cos \frac{\pi d}{l}$.

Полученные решения (13) и (14) являются однородными линейными алгебраическими уравнениями относительно коэффициентов a_n и b_n . Число уравнений бесконечно и как известно решение таких систем

отличается от нуля, если определитель системы уравнений равняется нулю.

Обычно удовлетворяются тем или иным приближением, беря число пространственных гармоник ограниченным, то есть полагая, что $\chi_n^H = 0$, $\chi_n^E = 0$ при $n > N$.

Определители систем тоже будут ограниченными и имеют $2N+1$ столбцов и столько же строк. Усеченные уравнения и дисперсионные уравнения обеих волн можно решить на ЭВМ. Корни дисперсионных уравнений для β_0 дают всевозможные распространяющиеся E и H волны в таком волноводе.

Рассмотрим некоторые частные случаи, полагая, что при $n \neq 0$ для всех пространственных гармоник $\chi_n^E = 0$ и $\chi_n^H = 0$. Тогда из уравнения (13) получим дисперсионное уравнение для симметричных E -волн

$$Z_0 \tilde{R}_\sigma = \chi_\sigma^E \tilde{K}_0^0 Z_0,$$

отсюда

$$\nu \tilde{\epsilon}_0^E \ln \frac{1-u}{2} = 1. \quad (15)$$

Здесь учитываем, что при малых $\nu \tilde{K}_0^0 = -\frac{1}{2} \ln \frac{1-u}{2}$, а $\tilde{R}_\sigma - \tilde{K}_0^0 = -\frac{1}{2\nu}$. Вспоминая обозначения для ν , нетрудно заметить, что здесь

речь идет о распространении таких волн, длина которых намного больше периода структуры. Поэтому формула (15) называется дисперсионным уравнением симметричных электрических волн в длинноволновом приближении. Аналогичное уравнение можно получить для симметричных магнитных волн:

$$\nu \tilde{\epsilon}_0^H \ln \frac{1+u}{2} = 1. \quad (16)$$

Перейдем к исследованию дисперсионных уравнений полагая, что обе среды не имеют потерь.

Как видно из (5)–(8), волны в данной системе распространяются без затухания, если продольное волновое число γ_n является действительной величиной. Значения поперечных волновых чисел Γ_{n2} , Γ_{n0} и Γ_{ne} получим из решения дисперсионного уравнения, и, следовательно, задача сводится к отысканию β_0 . Заметим, что безразмерный параметр ν для распространяющейся нулевой пространственной гармоники является положительным.

Используя рекуррентную формулу для цилиндрических функций, для f_0 и F_0 имеем

$$f_0(z) = -\frac{J_1(z)}{J_0(z)}; \quad F_0(z) = \frac{H_1^{(1)}(z)}{H_0^{(1)}(z)}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) Когда аргументы бесселевых функций положительные и большие, то есть $|\Gamma_{n2}a| \gg 1$, $|\Gamma_{n0}a| \gg 1$ и $|\Gamma_{ne}a| \gg 1$, тогда имеем

$$f_0(z) = -\operatorname{tg}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \text{ и } F_0(z) = i.$$

В этом случае дисперсионные уравнения (15) и (16) для симметричных E и H типов волн для кольцевого волновода имеют вид: Для H -волн

$$\left[i \sqrt{\varepsilon_0 x^2 - v^2} - \frac{\sqrt{\varepsilon_2 x^2 - v^2}}{\operatorname{tg}\left(\Gamma_{02} a - \frac{\pi}{4}\right)} \right] \ln \frac{1+u}{2} = 1. \quad (17)$$

Для E -волн

$$(\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_2 x^2 - v^2} \ln \frac{1-u}{2} = i \varepsilon_0 \frac{\Gamma_{0e} \Gamma_{02}}{\Gamma_{00}^2} - \varepsilon_2 \operatorname{tg}\left(\Gamma_{02} a - \frac{\pi}{4}\right). \quad (18)$$

Если волновод отсутствует, тогда $u = \cos \frac{\pi d}{l} = -1$ и дисперсионные уравнения (17) и (18) для диэлектрического волновода, помещенного в анизотропную среду, принимают следующий вид:

$$\operatorname{tg}\left(\Gamma_{02} a - \frac{\pi}{4}\right) = -i \frac{\sqrt{\varepsilon_2 x^2 - v^2}}{\sqrt{\varepsilon_0 x^2 - v^2}}, \quad (17a)$$

$$\operatorname{tg}\left(\Gamma_{02} a - \frac{\pi}{4}\right) = i \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \frac{\Gamma_{0e} \Gamma_{02}}{\Gamma_{00}^2}. \quad (18a)$$

При соответствующем выборе параметров эти формулы переходят в формулы, приведенные в [4], в § 9.15.

б) Когда аргументы бесселевых функций малы, то есть $|\Gamma_{n2} a| \ll \Gamma_{n0} a \ll 1$, $|\Gamma_{ne} a| \ll 1$, тогда имеем

$$F_0(z) = -\frac{1}{z \ln \frac{2}{\gamma z}}; \quad f_0(z) = -\frac{z}{2},$$

где $\gamma = 1,7811$ — постоянная Эйлера,

В этом случае дисперсионные уравнения принимают следующий вид: для H -волн

$$\frac{l}{2\pi} \left[a \Gamma_{00}^2 \ln \frac{2}{\gamma \Gamma_{00} a} - \frac{2}{a} \right] \ln \frac{1+u}{2} = 1, \quad (19)$$

для E -волн

$$\frac{\varepsilon_0}{a \Gamma_{00}^2 \ln \frac{2}{\gamma \Gamma_{0e} a}} = \frac{l}{2\pi} (\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r}) \ln \frac{1-u}{2} + \frac{\varepsilon_2 a}{2}. \quad (20)$$

Мы исследовали дисперсионные уравнения только в длинноволновом приближении. Среда, имеющая тензор диэлектрической проницаемости, подобный (1), также может быть искусственной средой, состоящей из периодичности чередующихся вдоль оси волновода двух изотропных диэлектриков с разной диэлектрической проницаемостью, при усло-

вии, когда сумма толщин двух соседних слоев меньше, чем длина волны в данной среде.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15.III.1971.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Э. С. Айранович, В. П. Шестополов, ЖТФ, 34, 11 (1964).
2. В. А. Барегамян, сб. Радиотехника, вып. 4, Изд. ХГУ, 1967.
3. Н. Н. Смирнов, ЖТФ, 28, 7 (1958).
4. Дж. Стреттон, Теория электромагнетизма, ОГИЗ, 1948.

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԱՆԻՔԱՏԱՐ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Վ. Ա. ԲԱՐԵԳԱՄՅԱՆ

Դիտարկված է սիմետրիկ էլեկտրական և մագնիսական ալիքների տարածումն անիզոտրոպ միջավայրում տեղավորված օղակալին ալիքատարում, Այդպիսի միջավայրի դիէլեկտրիկ թափանցելիության տենզորը համարվում է անկյունագծալին և բաղկացած է երկու էլեմենտից: Երկու տիպի ալիքների համար ստացված են դիսպերսիոն հավասարումներ, որոնք հետազոտված են մասնավոր դեպքերում: Օղակալին ալիքատար է համարվում միևնույն առանցքի վրա պարերերաբար դասավորված վերջավոր երկարությամբ իդեալական հաղորդիչ մետաղից պատրաստված գլանների սխեման:

CIRCULAR WAVEGUIDE IN AN ANISOTROPIC MEDIUM

U. A. BAREGHAMIAN

The propagation of symmetric electrical and magnetic waves in a waveguide immersed into an anisotropic medium is studied. The dielectric tensor of such a medium is considered diagonal and having two different elements. Dispersion equations for both types of waves are obtained and are investigated in special cases.