

НЕАБЕЛЕВЫ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ С ДВУМЯ МАССАМИ

Р. В. ТЕВИКЯН

Предлагается ввести в лагранжиан массивного поля Янга-Миллса две массы.

Требование инвариантности теории относительно обобщенных фазовых преобразований, полученных заменой параметров бесконечно малых преобразований $\varepsilon_i (i=1, 2, \dots, n)$ на произвольные функции $\varepsilon_i(x)$, предложенное впервые в работе Янга-Миллса [1] и подробно исследованное Утиямой [2], не приводит к необходимости введения новых векторных полей [3].

Мы будем параметры ε_i обобщать таким образом, чтобы выполнялись следующие требования, которые следуют из ненаблюдаемости фазы: во-первых, обобщенная фаза в каждой точке не должна обладать определенным значением, во-вторых, производная фазы в каждой точке должна иметь определенное значение. Эти требования означают, что обобщенная фаза является неинтегрируемой функцией [4]. Эти условия будут выполнены, если произвести замену

$$\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i(x, P), \quad (1)$$

где P — функциональный аргумент. При этом

$$\partial_\mu \varepsilon_i(x, P) = A_\mu^i(x). \quad (2)$$

Производные ∂_μ , действующие на функционал $\varepsilon_i(x, P)$, не коммутируют

$$(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \varepsilon_i(x, P) \neq 0. \quad (3)$$

Требования (1)–(3) будут выполнены, если положить

$$\varepsilon_i(x, P) = \int_{-\infty}^x A_\mu^i(\xi) d\xi_\mu, \quad (4)$$

где P — путь интегрирования от $-\infty$ до x . В этом случае, производная ∂_μ совпадает с градиентно инвариантной производной Мандельштама [5]. Из требования инвариантности теории относительно замены (1) следует необходимость введения компенсирующих полей: Янга-Миллса, гравитационного и т. д.

Для описания неабелевых полей удобно использовать матричное обозначение

$$A_\mu(x) = T_i A_\mu^i(x), \quad (5)$$

где матрицы T_i — представление группы [2], удовлетворяют соотношениям

$$[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k, \quad \text{tr} T_i T_j = \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad (6)$$

Лагранжиан массивного поля Янга-Миллса с массами m_1 и m_2 запишем с помощью двух потенциалов [6, 7] A_μ и $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ в следующем виде:

$$L = -\text{tr} F_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]) + \\ + \frac{1}{2} m_2 \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m_1 \text{tr} A_\mu A_\mu, \quad (7)$$

где для массы частицы m имеем $m^2 = m_1 m_2$.

Если масса частицы равна нулю, $m = 0$, тогда мы имеем две возможности: во-первых, $m_1 = 0$, $m_2 \neq 0$, в этом случае поле описывается потенциалом A_μ и тензором напряженности $F_{\mu\nu}$, а спиральность равна ± 1 . Во-вторых, $m_2 = 0$, $m_1 \neq 0$, в этом случае $F_{\mu\nu}$ — потенциал, а A_μ — вектор напряженности и спиральность равна 0. При $m \neq 0$ поле можно описывать потенциалом A_μ или $F_{\mu\nu}$. Таким образом, массы m_1 и m_2 связаны с возможными значениями спиральности частиц со спином 1.

Из лагранжиана (7) следуют уравнения движения

$$m_2 F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu), \\ m_1 A_\mu = \partial_\mu F_{\mu\nu} + ig(F_{\mu\nu} A_\nu - A_\nu F_{\mu\nu}). \quad (8)$$

Симметричный тензор энергии-импульса равен

$$T_{\mu\nu} = -m_2 \left(F_{\mu\alpha}^i F_{\nu\alpha}^i - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^i F_{\alpha\beta}^i \right) + \\ + m_1 \left(A_\mu^i A_\nu^i - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A_\alpha^i A_\alpha^i \right). \quad (9)$$

Из требования положительной определенности энергии следует, что постоянные m_1 и m_2 положительны или одна из них равна нулю.

Добавим к лагранжиану (7) минимальное взаимодействие

$$L = \text{tr} (A_\mu J_\mu), \quad (10)$$

где ток J_μ удовлетворяет соотношению $\partial_\mu J_\mu - ig[A_\mu, J_\mu] = 0$. В этом случае, в пределе $m_2 = 0$, взаимодействие (10) выпадает и мы получим

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) = 0, \\ \partial_\mu A_\mu = 0. \quad (11)$$

Таким образом, из теории Янга-Миллса, в пределе $m_2 = 0$, следует теория Сугавары [8, 9].

Как известно, уравнения (8), при $m_1 = 0$, инвариантны относительно преобразований

$$A_\mu \rightarrow S^{-1} A_\mu S + \frac{i}{g} S^{-1} \partial_\mu S,$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow S^{-1} F_{\mu\nu} S,$$
(12)

где $S = \exp \{ig\varphi\}$, $\varphi = T_i \varphi_i$, а φ — произвольное скалярное поле.

При $m_2 = 0$, уравнения (8) инвариантны относительно преобразований

$$A_\mu \rightarrow A_\mu,$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + g N_{\mu\nu} + \tilde{\partial}_\mu B_\nu,$$
(13)

где тильда означает дуальное сопряжение, а $B_\mu = T_i B_\mu^i$ — произвольное векторное поле. При этом, без ограничения общности, можно положить $\partial_\mu \tilde{N}_{\mu\nu} = 0$, $\partial_\mu B_\mu = 0$.

Функция $N_{\mu\nu}$ является решением уравнения

$$\partial_\nu N_{\mu\nu} + ig (N_{\mu\nu} A_\nu - A_\nu N_{\mu\nu}) + i (\partial_\mu \tilde{B}_\nu A_\nu - A_\nu \partial_\mu \tilde{B}_\nu) = 0.$$
(14)

Решение $N_{\mu\nu}$ легко получить, представив уравнение (14) в интегральной форме

$$N_{\mu\nu} = ig (\partial_\mu^{-1} [N_{\nu\alpha}, A_\alpha] - \partial_\nu^{-1} [N_{\mu\alpha}, A_\alpha]) +$$

$$+ i (\partial_\mu^{-1} [\partial_\nu \tilde{B}_\alpha, A_\alpha] - \partial_\nu^{-1} [\partial_\mu \tilde{B}_\alpha, A_\alpha]),$$
(15)

где ∂_μ^{-1} — интегральный оператор

$$\partial_\mu^{-1} f(x) = - \int f(x+y) \partial_\mu D(y) dy,$$

$$\partial^2 D(y) = \delta(y).$$
(16)

Свободные пропагаторы полей A_μ^i и $F_{\mu\nu}^i$ соответственно равны

$$\Delta_{\mu\nu}^{ij} = \delta_{ij} \left(m_2 g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_1} \right) \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon},$$
(17)

$$\Delta_{\mu\nu\alpha\beta}^{ij} = \delta_{ij} \left[m_1 (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m_2} (k_\mu k_\beta g_{\nu\alpha} - k_\nu k_\beta g_{\mu\alpha} - k_\mu k_\alpha g_{\nu\beta} + k_\nu k_\alpha g_{\mu\beta} + k^2 g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - k^2 g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) \right] \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon}.$$
(18)

Решение уравнения (11) можно представить в виде [10]

$$A_\mu = \frac{i}{g} S^{-1} \partial_\mu S,$$
(19)

где S удовлетворяет уравнению

$$\partial_\mu (S^{-1} \partial_\mu S) = 0.$$
(20)

Уравнение (20) инвариантно относительно замены $S \rightarrow S^{-1}$.

По этой причине из соотношения $\partial_\mu A_\mu = 0$, представив A_μ в виде

$$A_\mu = A_\mu^+ + A_\mu^-, \quad (21)$$

где

$$A_\mu^\pm = \frac{i}{2g} (S^{-1} \partial_\mu S \pm S \partial_\mu S^{-1}), \quad (22)$$

получим

$$\partial_\mu A_\mu^+ = 0, \quad \partial_\mu A_\mu^- = 0.$$

Подставляя значение $S = \exp \{ig \varphi\}$, где $\varphi = T_i \varphi_i$, в (20), мы получим уравнение для скалярного поля φ .

Имеем

$$S^{-1} \partial_\mu S = ig \partial_\mu \varphi + (ig)^2 \frac{1}{2!} [\partial_\mu \varphi, \varphi] + (ig)^3 \frac{1}{3!} [[\partial_\mu \varphi, \varphi], \varphi] + \dots \quad (23)$$

После введения обозначения $(\varphi)_{ij} = f_{ikj} \varphi_k$, получим

$$[\partial_\mu \varphi, \varphi] = i \partial_\mu \varphi_i \varphi_{ij} T_j, \quad (24)$$

$$[[\partial_\mu \varphi, \varphi], \varphi] = i^2 \partial_\mu \varphi_i \varphi_{ij}^2 T_j \dots$$

Из уравнений (19), (23) и (24) будем иметь

$$A_\mu = \partial_\mu \varphi_i \left(\frac{e^{-g\varphi} - 1}{g\varphi} \right) T_i. \quad (25)$$

Уравнение для поля φ можно непосредственно получить из лагранжиана

$$L_2 = m_1 \text{tr} A_\mu A_\mu = m_1 \partial_\mu \varphi_i \left(\frac{\text{ch } g\varphi - 1}{g^2 \varphi^2} \right)_{ij} \partial_\mu \varphi_j. \quad (26)$$

Если в лагранжиан

$$L_2 = \frac{m_1}{g^2} \text{tr} \partial_\mu S^{-1} \partial_\mu S \quad (27)$$

подставить $S = \frac{1 + ig \varphi'}{1 - ig \varphi'}$, тогда мы получим кирально инвариантный лагранжиан Вайнберга [11]. Таким образом, лагранжиан (7), в пределе $m_2 = 0$, кирально инвариантен, а при $m_1 = 0$ конформно инвариантен, так как в этом случае сохраняются конформные точки $I_{\mu\nu}$ и I_μ :

$$I_{\mu\nu} = \left(x_\nu x_\mu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} x_\alpha^2 \right) T_{\mu\alpha}, \quad I_\mu = T_{\mu\nu} x_\nu, \quad (28)$$

$$\partial_\mu I_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu I_\mu = 0.$$

Введем вектор A'_μ с помощью соотношения

$$A'_\mu = A_\mu^+ + \gamma_5 A_\mu^-, \quad (29)$$

где $\gamma_5^+ = \gamma_5$, $\gamma_5^2 = 1$. В этом случае простейший лагранжиан, для $\pi N(\varphi\varphi)$ взаимодействия, сохраняющий четность, можно представить в виде

$$L_3 = m_1 \frac{1}{4} \text{tr} A_\mu' A_\mu' - \bar{\psi} (i \not{\partial} - M) \psi + f \bar{\psi} \gamma_\mu A_\mu' \psi. \quad (30)$$

Первый член в правой части (30) совпадает с лагранжианом (26), так как

$$\text{tr} (A_\mu^+ A_\mu^- + A_\mu^- A_\mu^+) = 0. \quad (31)$$

Как известно, спиральность частицы сохраняется при $m=0$. Для массивного поля $m \neq 0$ спиральность сохраняется в пределе $|p| \rightarrow \infty$. В этом предельном случае мы имеем поперечные и продольные частицы. По этой причине перенормируемость теории при $m_1=0$ и при $m_2=0$ являются необходимыми условиями перенормируемости массивного поля $m \neq 0$.

Теория Сугавары — предельный случай массивного поля Янга-Миллса, неперенормируема. Следовательно, массивное поле Янга-Миллса также неперенормируемо.

Интересное выражение для функции Лагранжа было рассмотрено в работе Фрадкина и Тютюна [17], которое в наших обозначениях сводится к добавлению к функции Лагранжа (7) нового члена

$$L_4 = \partial_\mu A_\mu^i B_1^i + \frac{\alpha}{2} B_1^i B_1^i, \quad (32)$$

где B_1^i — произвольная функция от A_μ^i , $F_{\mu\nu}^i$ и скалярного поля B^i . Из лагранжиана $L+L_4$, в пределе $m_2=0$, также следует $A_\mu = \frac{i}{g} S^{-1} \partial_\mu S$, но при этом функция $S = \exp \{ig \varphi\}$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial^2 + am_1) \partial_\mu (S^{-1} \partial_\mu S) = [\partial_\mu \partial_\nu (S^{-1} \partial_\nu S), S^{-1} \partial_\mu S]. \quad (33)$$

Уравнение (3) инвариантно относительно замены $S \rightarrow S^{-1}$ и не содержит зависимости B_1^i от A_μ^i , $F_{\mu\nu}^i$ и B^i . Полученное уравнение неперенормируемо. Следовательно, лагранжиан $L+L_4$ также неперенормируем.

В заключение автор выражает глубокую признательность С. Г. Матиняну за полезные замечания и В. Н. Заславскому за обсуждение.

Ереванский физический институт

Поступила 12.XI.1971

ЛИТЕРАТУРА

1. C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev., 96, 191 (1954).
2. R. Utiyama, Phys. Rev., 101, 1597 (1956).
3. V. I. Ogievetski and I. V. Polubartov, Nuovo Cimento, 23, 173 (1962).
4. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., A133, 60 (1931).
5. S. Mandelstam, Ann. Phys. (N. Y.), 19, 1 (1962).
6. N. Kemmer, Helv. Phys. Acta, 33, 829 (1960).
7. В. И. Ошесевский и В. В. Полубаринов, Я. Ф. 4, 219 (1966).
8. G. Sugawara, Phys. Rev., 170, 1659 (1968).

9. K. Bardacki and M. Halpern, Phys. Rev., 172, 1542 (1968).
10. D. G. Boulware, Ann. Phys. (N. Y.), 56, 140 (1970).
11. S. Weinberg, Phys. Rev., 166, 1568 (1968).
12. E. S. Fadkin and I. V. Tyutin, Phys. Lett., 30B, 562 (1969).

ՈՉ-ԱՐԵԼՅԱՆ ՏՐԱՄԱՋԱՓԱՅԻՆ ԴԱՇՏԵՐ ԵՐԿՈՒ ՄԱՍՍԱՆԵՐՈՎ

Ռ. Վ. ՔԵՎԻԿՅԱՆ

Առաջարկվում է մասսիվ Յանգ-Միլլսի դաշտի Լագրանժի ֆունկցիան գրել օգտագործելով
երկու մասսաներ:

NON-ABELIAN GAUGE FIELDS WITH TWO MASSES

R. A. TEVIKYAN

It is suggested to introduce two masses into the Lagrangian of the massive Yang-Mills Field.