

О РАВНОВЕСИИ И СПЕКТРЕ ЧАСТОТ ПУЛЬСАЦИЙ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛАКА СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Р. С. ОГАНЕСЯН, М. Г. АБРАМЯН

В работе рассмотрены вопросы равновесного распределения плотности и радиальной пульсации электронного облака вокруг положительно заряженного шара и бесконечного цилиндра.

Найден закон распределения плотности числа электронов в равновесном состоянии. В рамках линейной теории с помощью уравнения движения задача пульсаций решена точно. Получено уравнение для определения полного спектра частот пульсаций электронного облака для сферической и цилиндрической симметрии.

§ 1. Сферическая симметрия

Пусть имеем положительно заряженный шар радиуса R и заряда Q_e , вокруг которого расположено электронное облако.

Для нахождения равновесного распределения плотности электронного облака воспользуемся следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } p &= -\rho_e \text{ grad } (V + \varphi_0), \\ \text{div grad } \varphi_0 &= -4\pi\rho_e, \\ p &= K\rho_m^\gamma, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь $\rho_m = m_e N(r)$ и $\rho_e = -eN(r)$ соответственно плотности массы и заряда электронного облака, φ_0 — электрический потенциал электронного облака, $V = \frac{Q_e}{r}$ — внешний электрический потенциал шара, n — индекс политропы.

Граничные условия к системе (1.1) следующие:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } r &= R; \quad N = N_0 \\ \text{при } r &= \infty; \quad N = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Представим

$$N(r) = A \cdot \theta_{(r)}^{(n)}, \quad (1.3)$$

где A и θ — подлежащие определению неизвестные величины. Из (1.1) с учетом (1.3) находим уравнение

$$\frac{K(n+1)m_e^2}{4\pi e^2 \cdot A} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = \theta_{(r)}^{(n)},$$

которое после обозначений

$$\alpha_n^2 = \frac{K(n+1)m_e^2}{4\pi e^2} \cdot A^{\frac{1-n}{n}}; \quad r = \alpha_n y$$

приводится к виду

$$\frac{1}{y^2} \frac{d}{dy} \left(y^2 \cdot \frac{d\theta}{dy} \right) = \theta^n. \quad (1.4)$$

Поскольку нас интересует решение уравнения (1.4) в интервале, не содержащем особенностей, то можно θ представить в виде [1]

$$\theta = c \cdot y^{-\beta}. \quad (1.5)$$

Подстановка (1.5) в (1.4) дает

$$\beta(\beta+1) \cdot y^{-\beta-2} = c^{n-1} \cdot y^{-n\beta}.$$

Ввиду произвольности c и β можно положить

$$\beta + 2 = n\beta; \quad c^{n-1} = \beta(\beta+1),$$

откуда

$$\beta = \frac{2}{n-1}; \quad c = \left\{ \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} \right\}^{\frac{1}{n-1}}.$$

После этого, уравнения (1.3) и (1.5) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \theta &= \left\{ \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} \right\}^{\frac{1}{n-1}} \cdot y^{-\frac{2}{n-1}}; \\ N &= A \left\{ \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} \right\}^{\frac{n}{n-1}} \cdot y^{-\frac{2n}{n-1}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Используя граничное условие (1.2), находим

$$A = N_0 \left\{ \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} \right\}^{-\frac{n}{n-1}} \cdot y_0^{\frac{2n}{n-1}},$$

где $y_0 = \frac{R}{\alpha_n}$. Подставляя последнее выражение в (1.6), получим закон равновесного распределения числа частиц электронного облака в виде

$$N(r) = N_0 \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2n}{n-1}}. \quad (1.7)$$

Возможные значения индекса политропы, получим, используя конечность заряда электронного облака [2];

$$\left| 4\pi e N_0 \int_R^\infty \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2n}{n-1}} r^2 dr \right| < \infty. \quad (1.8)$$

Для сходимости интеграла необходимо

$$1 < n < 3 \quad \left(\frac{4}{3} < \gamma < 2 \right). \quad (1.9)$$

Таким образом, спектр собственных значений граничной задачи определяется условием (1.9), а класс собственных функций — условием (1.7). Вычисляя интеграл (1.8), найдем полный заряд электронного облака

$$Q_e = -4\pi e N_0 R^3 \cdot \frac{n-1}{3-n}. \quad (1.10)$$

Отметим, что область изменения индекса политропы (1.9) остается неизменной и в том случае, если интегрирование в (1.8) производится в конечной области $[R; R_{\text{эф}}]$. Выберем $R_{\text{эф}}$ следующим образом [2]:

$$4\pi \int_R^{\infty} \rho_e(r) r^2 dr = \frac{4\pi}{3} \rho_{oe} (R_{\text{эф}}^3 - R^3),$$

откуда

$$R_{\text{эф}} = R \cdot \sqrt[3]{\frac{2n}{3-n}}. \quad (1.11)$$

Теперь вычислим напряженность электрического поля электронного облака, пользуясь уравнением Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{E}_e = -4\pi e N(r).$$

Откуда, имея ввиду теорему Гаусса (при $r = R$; $E_e = 0$), получим

$$E_e(r) = \frac{Q_e}{r^2} - \frac{Q_e}{R^2} \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Полагая, что в целом система нейтральна, $Q_p = |Q_e| \equiv Q$, для общей электрической напряженности системы получим

$$E(r) = E_c(r) + E_e(r) = \frac{Q}{R^2} \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{n+1}{n-1}}. \quad (1.12)$$

Подставляя формулу (1.7) в первое уравнение системы (1.1), для давления получаем

$$p(r) = 2\pi e^2 N_0^2 R^2 \frac{(n-1)^2}{(n+1)(3-n)} \cdot \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2(n+1)}{n-1}}. \quad (1.13)$$

Имея все равновесные параметры системы, исследуем радиальную пульсацию электронного облака.

Для получения уравнения малых радиальных колебаний, воспользуемся следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{e}{m} E, \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0; \quad p = K_p \gamma \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

В системе уравнений (1.14) предполагается, что ρ есть плотность массы электронного облака.

Продифференцируем первое уравнение по времени,

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{e}{m} \frac{dE}{dt}. \quad (1.15)$$

Обозначим через $q(r)$ заряд, заключенный внутри сферы радиуса r , так что

$$E = \frac{q}{r^2}.$$

Во время пульсаций $q(r)$ остается постоянной для отдельной частицы и потому

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2q}{r^3} \cdot \frac{dr}{dt} = -\frac{2E}{r} \cdot v. \quad (1.16)$$

Далее, преобразуя второй член в правой части уравнения (1.15), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{dp}{dt} \right) - \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} (\gamma p \operatorname{div} \vec{v}) - \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.17)$$

А преобразование первого члена дает

$$\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{dt} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2e}{m} \frac{E}{r} v. \quad (1.18)$$

При получении выражения (1.18) мы воспользовались вторым уравнением системы (1.14) и первым уравнением системы (1.1).

С учетом формул (1.16), (1.17), (1.18) уравнение (1.15) примет вид

$$\rho \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial r} (\gamma p \operatorname{div} \vec{v}) + \frac{4e}{m} \frac{E}{r} v. \quad (1.15)$$

Отклонения от равновесного состояния будут пропорциональны смещению $\vec{\zeta}(r, t)$ отдельной частицы.

Определим

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\zeta}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t}.$$

Полагая

$$\vec{\zeta}(r, t) = \vec{\xi}(r) e^{i\omega t}; \quad \vec{\xi}(r) = (\xi; 0; 0),$$

из (1.15) получим уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial r} (\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi}) + \left(\omega^2 + \frac{4e}{m} \cdot \frac{E}{r} \right) \rho \xi = 0. \quad (1.19)$$

Далее, подставляя в уравнение (1.19) выражения (1.7), (1.10), (1.12), (1.13) и производя дифференцирования, после некоторых преобразований получим следующее уравнение для малых радиальных колебаний:

$$r^2 \frac{d^2 \xi}{dr^2} - \frac{4}{n-1} r \frac{d\xi}{dr} + \left\{ 2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{2n(3-n)}{(n-1)^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2-n}{n-1}} \right\} \xi = 0, \quad (1.20)$$

где $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{m_e}$ — есть плазменная частота электронов. После обозначений

$$a = -\frac{4}{n-1}; \quad c=2; \quad m = \frac{2n}{n-1}; \quad b = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} \frac{2n(3-n)}{(n-1)^2} R^{-\frac{2n}{n-1}},$$

уравнение (1.20) примет вид

$$r^2 \frac{d^2 \xi}{dr^2} + ar \frac{d\xi}{dr} + (c + br^m) \xi = 0. \quad (1.21)$$

Представляя решение уравнения в виде

$$\xi(r) = c_1 \cdot r^{\frac{1-a}{2}} \cdot f(r),$$

для неизвестной функции f получается уравнение Бесселя первого рода порядка ν . Следовательно, решение уравнения (1.21) имеет следующий вид

$$\xi(r) = c_1 r^{\frac{1-a}{2}} \left\{ J_\nu \left(\frac{2}{m} \sqrt{b} \cdot r^{\frac{m}{2}} \right) + C J_{-\nu} \left(\frac{2}{m} \sqrt{b} \cdot r^{\frac{m}{2}} \right) \right\},$$

где c_1 и C постоянные, $c_1 \neq 0$, а

$$\nu = \frac{1}{m} \sqrt{(1-a)^2 - 4c}.$$

Или переходя к прежним обозначениям, для решения уравнения (1.20) получим

$$\xi(r) = c_1 \left(\frac{r}{R_{эф}} \right)^{\frac{3+n}{2(n-1)}} \left\{ J_\nu \left[x \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right] + C J_{-\nu} \left[x \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right] \right\}, \quad (1.22)$$

где

$$\nu = \frac{1}{2n} \sqrt{-7n^2 + 22n + 1}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{2(3-n)}{n}}.$$

Для получения спектра частот воспользуемся граничными условиями для возмущений. На внутренней границе электронного облака ($r=R$) должно удовлетворяться условие

$$\xi(R) = 0. \quad (1.23)$$

Внешняя граница возмущенного электронного облака должна быть определена как геометрическое место тех же самых материальных частиц, составляющих внешнюю границу невозмущенного облака ($r=R_{эф}$). Следовательно, давление на внешней границе должно быть неизменным и равным давлению на границе невозмущенной конфигурации; т. е. лагранжева вариация давления (лагранжева — так как внешняя граница пульсирует) при $r=R_{эф}$ равна нулю:

$$\delta p|_{R_{эф}} = -\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi}|_{R_{эф}} = 0.$$

У нас $p(R_{эф}) \neq 0$, следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{\xi}|_{R_{эф}} = 0, \quad (1.24)$$

где $R_{эф}$ — определяется через (1.11).

Условие (1.23) дает

$$J_\nu(x) + C J_{\nu+1}(x) = 0. \quad (1.25)$$

Условие же (1.24) дает

$$J_\nu(kx) + C J_{\nu+1}(kx) + x \cdot F(n) \{ J_{\nu-1}(kx) - C J_{\nu+2}(kx) \} = 0, \quad (1.26)$$

где мы ввели обозначения

$$k = \left(\frac{2n}{3-n} \right)^{\frac{n}{3(n-1)}}, \quad F(n) = \frac{2nk}{5n-1-2n\nu}.$$

Исключая из уравнений (1.25) и (1.26) постоянную C , находим следующее уравнение для спектра частот:

$$J_{-\nu}(x) J_\nu(kx) - J_\nu(x) J_{-\nu}(kx) + x \cdot F(n) \{ J_{-\nu}(x) J_{\nu-1}(kx) + J_\nu(x) J_{-\nu+1}(kx) \} = 0. \quad (1.27)$$

Откуда получаем выражение для полного спектра собственных частот электронного облака вокруг заряженного шара

$$x = X_\nu^{(m)}, \text{ или } \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{n}{2(3-n)}} \cdot X_\nu^{(m)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где $X_\nu^{(m)}$ являются корнями уравнения (1.27).

Ниже в табл. 1 приведены несколько корней уравнения (1.27) при различных значениях индекса политропы n для сферически-симметричного электронного облака (вычисления произведены на ЭВМ „Наири-2“).

Таблица 1

Корни уравнения (1.28) и спектр частот пульсаций сферически-симметричного электронного облака при различных значениях индекса политропы

m	$n = 1,5; \nu = 1,424$		$n = 2,5; \nu = 0,7$		$n = 2,99; \nu = 0,3727$	
	$X_{1,424}^{(m)}$	ω/ω_0	$X_{0,7}^{(m)}$	ω/ω_0	$X_{0,3727}^{(m)}$	ω/ω_0
1	1,713281	1,211477	1,240625	1,961599	0,084766	1,036437
2	4,689843	3,316219	2,326562	3,678578	0,195469	2,930006
3	7,814843	5,525927	3,172265	5,015788	0,319219	3,903101
4	10,978124	7,762704	4,033593	6,377666	0,440469	5,385628

§ 2. Цилиндрическая симметрия

Теперь рассмотрим электронное облако, расположенное вокруг положительно заряженного бесконечного цилиндра (радиуса R и заряда единицы длины Q). Для нахождения плотности равновесного распределения электронного облака будем пользоваться системой урав-

нений (1.1) (здесь $V = Q \ln r$ — внешний электрический потенциал цилиндра) с теми же граничными условиями (1.2). Аналогичные рассуждения нас приводят к тому же закону распределения плотности электронного облака

$$N(r) = N_0 \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2n}{n-1}}. \quad (2.1)$$

Конечность заряда электронного облака,

$$\left| 2\pi e N_0 \int_R^\infty \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2n}{n-1}} r dr \right| < \infty,$$

дает область изменения индекса политропы

$$1 < n < \infty.$$

Полный заряд электронного облака получается в виде

$$Q_e = -\pi e N_0 R^2 (n-1). \quad (2.2)$$

Аналогично (1.11)

$$R_{эф} = R \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

А для общей электрической напряженности системы цилиндр—электронное облако, при условии $|Q_e| = Q$ получаем

$$E(r) = \frac{2Q}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{n+1}{n-1}}. \quad (2.3)$$

Давление получается в виде

$$p(r) = \pi e^2 N_0^2 R^2 \frac{(n-1)^2}{n+1} \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2(n+1)}{n-1}}. \quad (2.4)$$

Теперь рассмотрим пульсацию этой системы. Воспользовавшись системой уравнений (1.14) для малых радиальных колебаний, получаем следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} (\gamma p \operatorname{div} \xi) + \left(\omega^2 + \frac{2e}{m} \cdot \frac{E}{r} \right) \rho \xi = 0.$$

Или подставляя сюда выражения (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4), получим уравнение для ξ

$$r^2 \frac{d^2 \xi}{dr^2} - \frac{3+n}{n-1} r \frac{d\xi}{dr} + \left\{ 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{4n}{(n-1)^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2n}{n-1}} \right\} \xi = 0,$$

решение которого дается в виде

$$\xi(r) = c_1 \left(\frac{r}{R_{эф}} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \left\{ J_\nu \left[x \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right] + C J_{-\nu} \left[x \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right] \right\},$$

где

$$\nu = \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Воспользовавшись граничными условиями (1.23) и (1.24), для определения спектра частот получаем уравнение (1.27), где только

$$k = \left(\frac{n+1}{2} \right)^{\frac{n}{2(n-1)}}, \quad F(n) = \frac{k}{2-\nu}.$$

Откуда получается спектр собственных частот пульсаций цилиндрически-симметричного электронного облака (см. табл. 2)

$$\omega = \omega_0 \sqrt{n \cdot X_n^{(m)}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Таблица 2

Корни уравнения (1.27) и спектр частот пульсаций цилиндрически-симметричного электронного облака при различных значениях индекса политроны

m	n = 1,5; $\nu = 1,6331$		n = 16; $\nu = 0,5$		n = 64; $\nu = 0,25$	
	$X_{1,6331}^{(m)}$	ω/ω_0	$X_{0,5}^{(m)}$	ω/ω_0	$X_{0,25}^{(m)}$	ω/ω_0
1	4,675999	5,671987	0,727562	2,910248	0,327353	2,618824
2	5,751000	6,975720	1,108312	4,435248	0,742588	5,940464
3	6,819750	8,272357	1,491624	5,966496	1,252353	10,818824
4	8,946313	10,851878	2,570531	10,282124	1,755478	14,043824

Ереванский государственный университет

Поступила 4.IV.1971

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Чандрасекар, Введение в учение о строении звезд, М., 1950.
2. А. А. Власов, Статистические функции распределения, М., 1966.

ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ԱՄՊԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԲԱՐԱԽՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՃԱՆԱՅԻՆ ՍՊԵԿՏՐԸ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԵՎ ԳՆԴԱՅԻՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊԵՆԴԵՆՍԻԱ

Ռ. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Մ. Գ. ԱՐԲԱՀԱՄՅԱՆ

Քննարկված են դրականորեն լիցքավորված զնդի և անվերջ զանի շուրջ էլեկտրոնային ամպի խտության հավասարակշռված բաշխման և ռադիալ բաբախումների հարցերը:

Գտնված է հավասարակշռության վիճակում էլեկտրոնային ամպի խտության բաշխման օրենքը: Այնուհետև, դժային տեսության շրջանակներում, շարժման հավասարումների օգնությամբ, բաբախումների խնդիրը լուծված է ճշգրիտ և ստացված է հավասարում էլեկտրոնային ամպի սեփական հաճախությունների լրիվ սպեկտրը որոշելու համար:

ON THE EQUILIBRIUM STATE AND SPECTRUM OF PULSATION FREQUENCIES OF AN ELECTRONIC CLOUD OF SPHERICAL AND CYLINDRICAL SYMMETRY

R. S. OGANESIAN, M. G. ABRAHAMIAN

In this work the problems of equilibrium distribution of density and radial oscillations of the electronic clouds around charged sphere and infinite cylindre are considered.

The distribution law of electronic cloud density in equilibrium state has been established.

The equation is obtained in linear theory framework for radial oscillations of the cloud. The linearized equation is solved then precisely and a total spectrum of electronic cloud natural frequencies is found.