Изв. АН Армянской ССР, Физика, 6, 433—438 (1971)

О СТЕПЕНЯХ ОРИЕНТАЦИИ ЯДЕР

В. А ДЖРБАШЯН

ПА-14.679

В связи с обнаружением ядерных уровней с большими спинами рассмотрена степень ориентации произвольного порядка для статистических ансамблей.

Доказана теорема, указывающая на простой вид $f_k(I)$ в первом неисчезающем приближении.

I. Введение

Угловые распределения излучений квантовой системы определяются распределением ее проекций моментов количества движения. При равномерном распределении излучение изотропно. Неравномерность распределения характеризуется $2I+1$ величинами — заселенностями a_m уровня I, связанными соотношением нормировки. Выделив последнее $f_0 = \sum_m a_m = 1$, при расчетах удобно переходить к другим $2I$ линейно независимым величинам $f_k(I)$ — степеням [1] ориентации с порядками $k = 1, 2 \cdots, 2I$.

При решении конкретных задач [2] часто приходится иметь дело со статистическими ансамблями. В параграфе II приводится определение f_k в этом случае.

Наряду с f_1 и f_2 в угловые распределения излучений Co^{60} входит f_4. Эти величины рассматриваются при произвольном спине I ядра в параграфе III для некоторых простых случаев.

В связи с обнаружением ядерных уровней с большими спинами и улучшением точности эксперимента интересно узнать, что такое $f_k(I)$ для произвольного k в первом неисчезающем приближении. Ответом на этот вопрос служит теорема, доказанная в параграфе IV. Наконец, в параграфе V рассматривается случай, когда изучаемый образец состоит из двух разных в магнитном отношении сортов. Этот случай имеет отношение к азотнокислым солям Co^{60}, одна из которых будет детально изучаться позже.

II. Определение

Степень ориентации порядка k по определению [1] есть

$$f_k(I) = W_k(I) \sum_m (-1)^{I-m} C^{k0}_{Im,\, I-m}\, a_m, \tag{1}$$

где коэффициент

$$W_k(I) = \binom{2k}{k}^{-1} I^{-k} \left[\frac{(2I+k+1)!}{(2k+1)\,(2I-k)!} \right]^{1/2} \tag{2}$$

выбран таким, чтобы величина m^k, являющаяся наивысшей степенью m, входила под знак суммы (1) с коэффициентом I^{-k}.

Когда мы имеем дело со статистическими ансамблями, характеризуемыми матрицей плотности ρ, то модификацией выражения (1) будет

$$f_k = \frac{W_k(I)\, Tr\left[(-1)^{I-I_z}\, \hat{C}^{k0}_{II_z,\, I-I_z}\, \hat{\rho}\right]}{Tr\left[\hat{\rho}\right]}, \tag{3}$$

где $\hat{C}^{k0}_{II_z,\, I-I_z}$ есть оператор Клебша-Гордана, получающийся из коэффициента Клебша-Гордана заменой квантового числа проекции момента m на ее оператор $\hat{I}_z$.

Частные случаи выражения (3) для $k=1$, 2 приведены в работе [2], для $k=4$ из (3) получаем

$$f_4 = \frac{1}{I^4}\left\{\frac{Tr\left[I_z^4 \rho\right]}{Tr\left[\rho\right]} - \frac{1}{7}(6I^2+6I-5)I^2 f_2 - \frac{1}{15} I(I+1)(3I^2+3I-1)\right\}, \tag{4}$$

что для чистых ансамблей совпадает с приведенным в [3].

III. Некоторые простые случаи

В ряде случаев заселенности могут быть представлены в виде

$$a_m \sim \exp(\varphi m). \tag{5}$$

Тогда, подставляя (5) в (1) и суммируя по m, получим

$$f_1^{(0)}(I, \varphi) = \frac{1}{I}\left[-\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\varphi}{2} + \left(I+\frac{1}{2}\right)\operatorname{cth}\left(I+\frac{1}{2}\right)\varphi\right], \tag{6}$$

$$f_2^{(0)}(I, \varphi) = \frac{1}{I}\left[\frac{2}{3}(I+1) - \operatorname{cth}\frac{\varphi}{2} f_1^{(0)}(I, \varphi)\right], \tag{7}$$

$$f_4^{(0)}(I, \varphi) = \frac{1}{I^3}\left\{\left[3\operatorname{cth}^2\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{7}(8I^2+8I-9)\right] I f_2^{(0)}(I, \varphi) - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{15}(I+1)(2I-1)(2I+3)\right\}. \tag{8}$$

Формулы (6) и (7) получены Стинбергом [4]. Формула (8) при другой нормировке и в несколько ином виде получена Хуцишвили [5]. Эти формулы выведены для случая поляризации ядер внешним полем, когда $\varphi = \mu H/IkT$. Однако они совместно с (8) применимы и для других случаев.

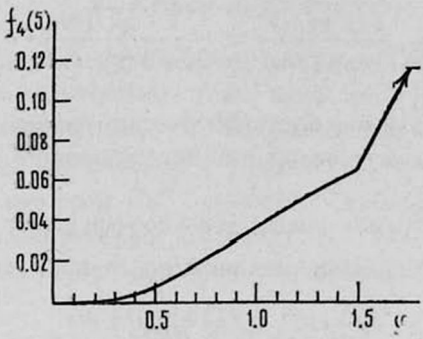
Например, для случая поляризации ядер через сверхтонкую связь во внешнем поле (метод Гортера-Роуза), когда удовлетворяется условие $\exp(-g\beta H/kT) \ll 1$ и когда поперечная часть [6] сверхтонкого взаимодействия $B(I_xS_x + I_yS_y)$ мала по сравнению с зеемановской энергией электронов $g\beta HS_z$. Последнее имеет место, когда либо кон-

станта B мала, либо приложено достаточно большое поле. Тогда для φ в (6), (7) и (8) должно быть подставлено $\varphi = AS/kT$.

Если условие $\exp(-g\beta H/kT) \ll 1$ не удовлетворяется, то имеет место более общая формула

$$f_k = \frac{\sum\limits_{\mu=-S}^{S} f_k^{(0)}\left(I, -\frac{\mu}{S}\varphi\right) \frac{\operatorname{sh}\left(I+\frac{1}{2}\right)\frac{\mu}{S}\varphi}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\frac{\mu}{S}\varphi} \exp(-g\beta H\mu/kT)}{\sum\limits_{\mu=-S}^{S} \frac{\operatorname{sh}\left(I+\frac{1}{2}\right)\frac{\mu}{S}\varphi}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\frac{\mu}{S}\varphi} \exp(-g\beta H\mu/kT)}.$$

Для интересующего нас случая Co^{60} $I = 5$ графики (6) и (7) приведены в [1], график (8) приведен на рисунке.



Зависимость степени ориентациии f_4 от $\varphi = AS/kT$ для $I=5$, применяемой к Co^{60}.

Если (6) и (7) разложить по φ до членов порядка φ^7 и φ^6 соответственно и подставить в (8), то можно получить первый неисчезающий член разложения $f_4^{(0)}(I, \varphi)$.

Напишем несколько первых членов разложений (6), (7) и (8)

$$f_1^{(0)}(I, \varphi) \approx \frac{I+1}{3}\varphi\left[1-\left(I^2+I+\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi^2}{15}+\cdots\right], \tag{9}$$

$$f_2^{(0)}(I, \varphi) \approx \frac{(I+1)(2I-1)(2I+3)}{90I}\varphi^2\left[1-(8I^2+8I+5)\frac{\varphi^2}{84}+\cdots\right], \tag{10}$$

$$f_4^{(0)}(I, \varphi) \approx \frac{(2I+5)!}{2\cdot 7!\,7!!\,(2I-4)!\,(2I+1)\,I^4}\varphi^4 - \cdots. \tag{11}$$

Заметим, что первые члены разложения (9) и (10) приведены в [1].

IV. Первое неисчезающее приближение

Первые члены разложений (9) — (11) подсказывают возможный простой вид выражения (1) в первом неисчезающем приближении. Действительно, оказывается справедливо следующее утверждение.

Если заселенности могут быть представлены в виде (5), то степень ориентации порядка k, определяемая выражением (1), в первом неисчезающем приближении равна

$$f_k(I) \approx V_k(I)\varphi^k, \tag{12}$$

где коэффициент пропорциональности

$$V_k(I) = \frac{I^k W_k^2(I)}{(2I+1)\,k!} = \frac{k!\,(2I+k+1)!}{[2^k(2k-1)!!]^2(2k+1)(2I-k)!\;(2I+1)\;I^k}. \tag{13}$$

Доказательство.

Разложим заселенности a_m, определяемые выражением (5), по степеням φ

$$a_m = \frac{\exp(\varphi m)}{\sum\limits_m \exp(\varphi m)} \approx \frac{1}{2I+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varphi m)^n}{n!}. \tag{14}$$

В знаменателе (14) мы оставили только первый член разложения поскольку остальные дадут вклад в неинтересующие нас высшие приближения $f_k(I)$.

Теперь воспользуемся тем, что коэффициент Клебша-Гордана, $C^{no}_{Im,\,I-m}$ представляет из себя полином по m порядка n

$$C^{no}_{Im,\,I-m} = \sum_{l=0}^{n} d_l m^l, \tag{15}$$

причем коэффициент d_n, согласно сказанному выше в связи с выражением (1), равен

$$d_n = (-1)^{I-m}[I^n W_n(I)]^{-1}. \tag{16}$$

Учитывая (15) и (16), можем разложить m^n по коэффициентам Клебша-Гордана

$$m^n = \sum_{l=0}^{n} b_l(-1)^{I-m} C'^{o}_{Im,\,I-m}, \tag{17}$$

$$b_n = \frac{(-1)^{I-m}}{d_n} = I^n W_n(I). \tag{18}$$

Подставляя (14) и (17) в выражение, находящееся под знаком суммы в (1), меняя порядок суммирования и используя ортонормированность коэффициентов Клебша-Гордана, получим

$$\sum_m (-1)^{I-m} C^{ko}_{Im,\,I-m}\, a_m = \frac{1}{2I+1}\sum_m C^{ko}_{Im,\,I-m} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} \sum_{l=0}^{n} b_l C^{lo}_{Im,\, I-m} = \frac{1}{2I+1} \sum_{n=l}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} b_l \sum_{m} C^{ko}_{Im,\, I-m} C^{lo}_{Im,\, I-m} = \frac{1}{2I+1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} b_k \approx \frac{1}{2I+1} \frac{\varphi^k}{k!} b_k. \qquad (19)$$

В конечном выражении (19) из всей суммы мы оставили только первый неисчезающий член с $n = k$. Для такого члена коэффициент b_k дается формулой (18).

Подставляя (18) и (19) в (1) и учитывая, что

$$\binom{2k}{k} = \frac{2^k (2k-1)!!}{k!}, \qquad (20)$$

придем к формуле (13).

Нетрудно видеть, что первые члены разложений (9), (10) и (11) являются частными случаями (12).

V. Смесь двух сортов

Некоторые парамагнитные соли могут представлять из себя смесь разных сортов, гамильтонианы (см., напр. [6, 7]) которых отличаются значениями констант g, A, B. Методами парамагнитного резонанса [8] и динамической ориентации [7] обнаружено, в частности, что изучаемые азотнокислые соли Co^{60} являются смесью двух сортов, доли которых относятся примерно [9] как 2 : 1.

В случае смеси двух сортов в выражение (1) подставляя

$$a_m = r_1 a_m(1) + r_2 a_m(2), \qquad (21)$$

где посредством r_i обозначена доля i-го сорта ($r_1 + r_2 = 1$), для рассмотренных в параграфе III случаев будем иметь

$$f_k(I, \varphi) = \frac{R_1 f_k^{(0)}(I, \varphi_1) + R_2 f_k^{(0)}(I, \varphi_2)}{R_1 + R_2}. \qquad (22)$$

Здесь $f_k^{(0)}(\mathrm{I}, \varphi_i)$ означает степень ориентации k-го порядка для i-го сорта. Для $k = 1, 2, 4$ $f_k^{(0)}(\mathrm{I}, \varphi_i)$ дается формулами (6), (7) и (8).

R_i есть $r_i \operatorname{sh}\left(\mathrm{I} + \frac{1}{2}\right) \varphi_i / \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2}$ в случае поляризации внешним полем

и $r_i \exp(g_i \beta HS/kT) \operatorname{sh}\left(\mathrm{I} + \frac{1}{2}\right) \varphi_i / \operatorname{sh} \frac{\varphi_i}{2}$ в случае Гортера—Роуза.

Из (22) видно, что для азотнокислых солей Co^{60}, для которых $g_1 \approx 4$, $g_2 \approx 8$, степень ориентации определяется фактически вторым сортом.

Ереванский физический институт

Поступила 16.VI.1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана, М., 1969.
2. *A. Simon, M. E. Rose, J. M. Jauch,* Phys. Rev., 84, 1155 (1951).
3. *S. R. de Groot,* Physica, 18, 1201 (1952).
4. *A. Steenberg,* Proc. Phys. Soc., 65, 791 (1952).
5. *Г. Р. Хуцишвили,* ЖЭТФ, 28, 496 (1955).
6. *V. A. Djrbashian,* Nucl. Phys., A103, 177 (1967).
7. *C. D. Jeffries,* Phys. Rev., 117, 1056 (1960).
8. *R. S. Trenam,* Proc. Phys. Soc., A66, 118 (1953).
9. *E. Ambler* et al., Phil. Mag., 44, 216 (1953).

ՄԻՋՈՒԿՆԵՐԻ ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՄԱՆ ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Հ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Մեծ սպիններով միջուկային մակարդակների հայտնաբերման կապակցությամբ դիտարկված է կամավոր կարգի կողմնորոշման աստիճանը ստատիստիկ անսամբլների համար։

Ապացուցված է թեորեմ, որը նշում է $f_k(I)$-ի պարզ տեսքը առաջին չանհետացող մոտավորությունում։

ON THE DEGREES OF NUCLEAR ORIENTATION

V. A. DJRBASHIAN

The degree of orientition of an arbitrary order for the statistical ensembles is considered in connection with the discovery of high spin nuclear levels.

The theorem pointing out the simple view of $f_k(I)$ in the first nonvanishing approximation is proved.