

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СРЕД

С. М. ХЗАРДЖЯН, Е. К. НАИМИ

Используя связь между параметрами исследуемых процессов и механическими параметрами системы, уравнения движения механики преобразуются в уравнения, описывающие исследуемые процессы. В работе показано, что такой подход позволяет, в частности, рассматривать электромеханические, магнито-механические и реологические явления с единой точки зрения. Получены законы дисперсии феноменологических коэффициентов, определяющих эти свойства среды.

Если реакция среды на внешние воздействия зависит от предыстории системы, т. е. от того, какие воздействия были оказаны на нее в предыдущие моменты времени, то такая среда называется наследственной.

Наследственные среды бывают двух типов:

1. После прекращения внешних воздействий система в течение конечного промежутка времени возвращается в исходное состояние (под исходным состоянием здесь подразумевается состояние, в котором находилась система при отсутствии внешних воздействий). Физически это означает, что воздействия, оказанные на систему, возбуждают в ней какие-то процессы, которые сохраняются в течение некоторого промежутка времени после снятия внешних воздействий. Такие процессы называются термодинамически неравновесными.

2. После прекращения внешних воздействий система не возвращается в исходное состояние. В этом втором случае под влиянием внешних воздействий в системе происходят структурные изменения, поэтому система, после снятия внешних воздействий, не возвращается в исходное состояние. Такие процессы называются термодинамически необратимыми. В данной работе будем рассматривать системы первого типа.

При механическом способе описания состояние системы задается $6N$ параметрами, где N —число частиц в системе. Для определения поведения системы нужно решить $6N$ уравнений при заданных начальных и граничных условиях. Если начальные и граничные условия практически точно учесть нельзя, то применяются методы статистической физики.

Когда процессы в системе протекают термодинамически обратимо, число параметров, необходимых для описания этих процессов, сводится к минимуму. При этом уравнения имеют вид механических уравнений движений; наличие среды учитывается в постоянных коэффициентах, входящих в эти уравнения. Аналогичная ситуация возникает при решении уравнений Максвелла.

Если процессы протекают термодинамически неравновесно, то поведение этих процессов можно описать, используя феноменологические

уравнения механики и связь между механическими характеристиками среды и характеристиками исследуемых процессов.

В данной работе эта возможность иллюстрируется на примере линейных наследственных сред.

1. Электродинамика наследственных сред. Диэлектрики и магнетики

Главной задачей электродинамики диэлектриков и магнетиков является определение вида тензоров диэлектрической ϵ_{ij} и магнитной μ_{ij} проницаемостей в различных средах.

а) Для определения ϵ_{ij} будем исходить из уравнений движения механики

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

где $\vec{K}$ — импульс единицы объема среды; $\vec{F}$ — сила, действующая на единицу объема среды.

При термодинамически обратимых процессах в простейшем случае связь между импульсом $\vec{K}$ и вектором поляризации $\vec{P}$ имеет вид

$$\vec{K}(t) = \alpha \frac{m}{e} \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad (2)$$

где m и e — соответственно масса и заряд электрона; α — постоянный коэффициент.

При наличии временной дисперсии, в общем случае, вместо (2) для установившегося процесса в линейном приближении будем иметь

$$K_l(t) = \int_{-\infty}^t A_{lk}(t-t') \frac{dP_k(t')}{dt'} dt'. \quad (3)$$

В (3) предполагается, что среда однородна по времени. Кроме того, учитывая принцип причинности, положим

$$A_{lk}(t-t') = \begin{cases} 0, & \text{при } t < t' \\ a_{lk} \delta(t-t') + R_{lk}(t-t'), & \text{при } t \geq t', \end{cases} \quad (4)$$

где a_{lk} — некоторый постоянный тензор; $R_{lk}(t-t')$ — зависят от выбора конкретной модели среды.

Подставляя (3) и (4) в (1), получим

$$a_{lk} \frac{d^2 P_k}{dt^2} + R_{lk}(0) \frac{dP_k}{dt} + \int_{-\infty}^{t-t'} \frac{\partial P_{lk}(t-t')}{\partial t} \frac{dP_k(t')}{dt'} dt' = F_l. \quad (5)$$

В частном случае из уравнения (5) можно получить уравнения для поляризации в модели анизотропного осциллятора [1]:

$$\rho_{ij}^a \ddot{P}_j^a + r_{ij}^a \dot{P}_j^a + k_{ij}^a P_j^a = q^a N^a q_{ik}^a E_k, \quad (6)$$

где $\vec{P}^a = q^a N^a \vec{r}^a$ — вектор поляризации a -сорта частиц с зарядом q^a ; N^a — число частиц данного сорта в единице объема; $\vec{r}^a$ — радиус-вектор; q_{ik}^a — тензор эффективного заряда, определяющий силу, действующую на частицу в поле $\vec{E}$ (в вакууме $q_{ij}^a = q^a \delta_{ik}$); ρ_{ij}^a , r_{ij}^a и k_{ij}^a — постоянные тензоры, смысл которых ясен из (6).

Решая уравнение (6), можно найти связь между $\vec{P}$ и $\vec{E}$. При периодическом воздействии для стационарного режима имеем

$$P_i(\omega) = \sum_a \chi_{ij}^a(\omega) E_j(\omega), \quad (7)$$

где тензор $\chi_{ij}^a(\omega)$ определяется из уравнения

$$(-\omega^2 \rho_{ij}^a - i\omega r_{ij}^a + k_{ij}^a) P_j^a(\omega) = q^a N^a q_{ik}^a E_k(\omega). \quad (8)$$

При известном $\chi_{ij}^a(\omega)$ тензор диэлектрической проницаемости находится по формуле

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ij}^0 + 4\pi \sum_a \chi_{ij}^a(\omega), \quad (9)$$

где ε_{ij}^0 — тензор диэлектрической проницаемости в отсутствии центров дисперсии; ω — угловая частота.

Для модели диэлектрика с последействием типа Больцмана-Вольтера, в (5) нужно положить

$$R_{ik}(t-t') = R_{ik} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right), \quad (10)$$

где R_{ik} — постоянные; τ — время релаксации.

Подставляя (10) в (5) и учитывая (3), (4) и (1), получим релаксационное уравнение относительно $\vec{K}$ и $\vec{P}$, отвечающее ядру (10):

$$\tau \frac{dK_i}{dt} + K_i = \tau a_{ik} \frac{d^2 P_k}{dt^2} + a_{ik} (+\tau R_{ik}) \frac{dP_k}{dt}. \quad (11)$$

Закон дисперсии тензора A_{ik} находится непосредственно из (3), (4) и (10) или из (11) путем перехода к Фурье-компонентам.

В общем случае в среде могут протекать несколько релаксационных процессов, характеризующихся различными временами релаксации. Релаксационные уравнения соответствующих процессов могут быть найдены аналогичным путем.

б) Для определения ρ_{ij} следует исходить из уравнений движения

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = [\vec{M}\vec{H}], \quad (12)$$

где $\vec{I}$ и $\vec{M}$ — соответственно механический и магнитный моменты единицы объема среды.

При термодинамически обратимых процессах

$$M_i(t) = \frac{e}{2mc} g_{ik} I_k(t), \quad (13)$$

где c — скорость света; g_{ik} — постоянные гиромагнитные коэффициенты.

Если условия термодинамической обратимости не выполняются, то связь между векторами $\vec{I}$ и $\vec{M}$ для установившегося процесса, в линейном приближении, можно задать в следующем виде:

$$M_i(t) = \int_{-\infty}^t G_{ik}(t-t') I_k(t') dt'. \quad (14)$$

Гиромагнитный тензор $G_{ik}(t-t')$ представим в виде двух частей ($t > t'$):

$$G_{ik}(t-t') = \gamma_{ik} \delta(t-t') + \Gamma_{ik}(t-t'), \quad (15)$$

где γ_{ik} — гиромагнитный тензор в отсутствие центров дисперсии; $\Gamma_{ik}(t-t')$ — функции, зависящие от конкретной модели диспергирующей среды.

Дифференцируя (14) с учетом (15) по времени t , как по параметру, и используя исходное уравнение движения (12), найдем

$$\begin{aligned} \frac{dM_i}{dt} &= \gamma_{ik} [\vec{M}\vec{H}]_k + \Gamma_{ik}(0) \gamma_{kl}^{-1} M_l^0(t) + \\ &+ \gamma_{kl}^{-1} \int_{-\infty}^{t-t'} \frac{\partial \Gamma_{ik}(t-t')}{\partial t} M_l^0(t') dt', \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$M_l^0(t) \equiv \gamma_{lk} I_k(t). \quad (17)$$

Уравнение (16) в общем виде определяет связь между $\vec{M}$ и $\vec{H}$, и тем самым тензор магнитной проницаемости μ_{ij} .

Для примера рассмотрим релаксацию изотропного магнетика, когда

$$\gamma_{ik} = \gamma \delta_{ik}; \quad \Gamma_{ik}(t-t') = \Gamma \delta_{ik} \exp\left(-\frac{t-t'}{T}\right), \quad (18)$$

где T — время релаксации; γ — гиромагнитное отношение. Подставляя (18) в (16), получим релаксационное уравнение для намагниченности в форме Абрагама [2]:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma [\vec{M}\vec{H}] - \frac{\vec{M} - \vec{M}_0}{T}, \quad (19)$$

где

$$\vec{M}_0 = \left(1 + \frac{\Gamma}{\gamma}\right) \vec{M}^0 \quad (20)$$

— равновесная намагниченность при наличии центров дисперсии.

Из (16) легко получить известные уравнения Блоха [3] с двумя временами релаксации. Для этого достаточно выбрать ядро $\Gamma_{lk}(t-t')$ в виде

$$\Gamma_{xx} = \Gamma_{yy} = \Gamma_2 \exp\left(-\frac{t-t'}{T_2}\right); \quad \Gamma_{zz} = \Gamma_1 \exp\left(-\frac{t-t'}{T_1}\right); \quad (21)$$

$$\Gamma_{lk} = 0, \quad \text{при } i \neq k,$$

где T_1 и T_2 — времена „продольной“ и „поперечной“ релаксации соответственно (постоянное поле $\vec{H}$ направлено вдоль оси z , радиочастотное поле $\vec{H}_1$ перпендикулярно z). В результате будем иметь

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma [\vec{M}\vec{H}] - \frac{M_x - M_{ox}}{T_2} \vec{i} - \frac{M_y - M_{oy}}{T_2} \vec{j} - \frac{M_z - M_{oz}}{T_1} \vec{k}. \quad (22)$$

При $|\vec{H}_1| \ll |\vec{H}|$ можно положить $M_{ox} = M_{oy} = 0$ и уравнение (22) переходит в блоховское векторное уравнение, из которого определяется μ_{ij} [3].

Отметим, что из (14) следует дисперсия гироманнитного тензора G_{lk} . В случае изотропного магнетика, используя (19), (20), (17) и (12), легко получить релаксационное уравнение относительно $\vec{I}$ и $\vec{M}$:

$$T \frac{d\vec{M}}{dt} + \vec{M} = \gamma T \frac{d\vec{I}}{dt} + (\gamma + \Gamma) \vec{I}. \quad (23)$$

Переходя в (23) к Фурье-компонентам, найдем закон дисперсии гироманнитного тензора для рассматриваемой модели магнетика:

$$G_{lk}(\omega) = G(\omega) \delta_{lk} = \frac{\Gamma + \gamma(1 + \omega^2 T^2) + i\gamma\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \delta_{lk}. \quad (24)$$

Величину $\Delta = \left| \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} \right|$, где $G''(\omega)$ и $G'(\omega)$ — соответственно мнимая и действительная части $G(\omega)$, можно рассматривать как меру „гироманнитных потерь“. При $\Gamma \ll \gamma$ (слабое затухание) из (24) находим

$$\Delta = \frac{\Gamma}{\gamma} \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}. \quad (25)$$

2. Механика наследственных сред

Общую линейную связь между полной деформацией среды e_{ik} и напряжением σ_{lm} с учетом временной дисперсии можно записать в виде (4)

$$e_{ik}(t) = s_{iklm}^{\mu g} \sigma_{lm}(t) + \int_{-\infty}^{t > t'} \Lambda_{iklm}(t-t') \sigma_{lm}(t') dt', \quad (26)$$

где $s_{iklm}^{\mu g}$ — тензор податливостей идеально упругой среды;

$\Delta_{iklm}(t-t')$ — тензорная функция наследственности, зависящая от выбора конкретной модели среды.

Задачей механики наследственных сред является определение вида функций $\Delta_{iklm}(t-t')$ в различных средах.

Для некоторых моделей сред эта задача была рассмотрена в [5, 6].

ВЭМИ, МГУ

им. М. В. Ломоносова

Поступила 15.III.1971

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. М. Агранович, В. А. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., Наука, стр. 244 (1965).
2. А. Абрахам, Ядерный магнетизм, М., ИЛ, стр. 54 (1963).
3. F. Bloch, Phys. Rev. 70, 460 (1946).
4. С. М. Хазарджян, Ученые записки Ер. ГУ, 2, 31 (1969).
5. Е. К. Наими, С. М. Хазарджян, К линейной теории наследственных сред. В сб. "Радиоэлектроника оптического диапазона". М., ВЭМИ (1971) (в печати).
6. Е. К. Наими, С. М. Хазарджян, К дислокационной теории анизотропного внутреннего трения. В сб. Радиоэлектроника оптического диапазона. М., ВЭМИ, (1971) (в печати).

ՃԱՌԱՆԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՆԵՐԻ ԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇԻՈՐՋՐ

Ս. Մ. ԽԱՀԱՐՋՅԱՆ, Ե. Կ. ՆԱԻՄԻ

Օրոշագործելով սխառմի մեխանիկական պարամետրերի և ուսումնասիրվող պրոցեսները բնութագրող պարամետրերի կապը, մեխանիկայի շարժման հավասարումները վերափոխվել են ուսումնասիրվող պրոցեսները բնորոշող հավասարումներով: Այդպիսի մոտեցումը հնարավորություն է տալիս, մասնավորապես, ընդհանուր տեսանկյունից ուսումնասիրել էլեկտրամեխանիկական, մագնիսամեխանիկական և ռեոլոգիական երևույթները:

SOME ASPECTS OF LINEAR THEORY OF HEREDITARY MEDIA

C. M. KHAZARJAN, E. K. NAIMI

Using the connection between the characteristics of the processes in question and the mechanical characteristics of the system, motion equations of mechanics are transformed into equations describing the involved processes.

This procedure is shown to favour in particular the uniform treatment of electromechanical, magneto-mechanical and reological phenomena.

The dispersion laws of phenomenological factors governing these media properties are obtained.