

К ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В РЕЗОНАТОРЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

А. С. АДАМЧУК, Л. Г. НАРЫШКИНА

Рассмотрено возбуждение идеального цилиндрического резонатора с анизотропным заполнением с помощью переходного излучения, возникающего при пролете сгустка на простейшей модели движения точечного электрического диполя вдоль оптической оси одноосного кристалла, заполняющего резонатор. Показано, что наличие у диполя перпендикулярно ориентированного к движению электрического момента приводит к определенному изменению свойств поля переходного излучения.

Теория переходного излучения в резонаторах довольно хорошо разработана в работах [1—5], где исследовались различные способы возбуждения электромагнитного резонатора потоком сгустков заряженных частиц. Однако в этих работах не учитывалась возможность существования у движущегося сгустка электрического или магнитного момента, что определенным образом изменит свойства переходного излучения. Это явление исследуется ниже в рамках простейшей модели, когда движущийся источник заменяется элементарным течечным диполем.

Рассмотрим резонатор, образованный отрезком идеального цилиндрического волновода произвольного поперечного сечения, закороченного двумя идеально проводящими плоскостями $z = 0$ и $z = l$, где считается, что ось oz некоторой прямоугольной системы координат совпадает с осью волновода. Для общности рассмотрения будем предполагать, что резонатор заполнен одноосным анизотропным кристаллом, оптическая ось которого направлена по oz , и компоненты тензора диэлектрической проницаемости есть $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_1$, $\epsilon_z = \epsilon_2$. Будем считать, что точечный диполь движется со скоростью v вдоль оси oz и его электрический момент $\vec{p}$ ориентирован вдоль оси ox , т.е. перпендикулярно скорости. Закон его движения имеет вид

$$\vec{p} = p_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - vt), \quad (1)$$

где p_0 — момент диполя, измеренный в движущейся системе координат, $M_0(x_0, y_0)$ — точка пересечения траектории его движения с поперечным сечением волновода.

Заметим, что этот случай представляет наибольший интерес, так как присутствие продольной составляющей момента при наличии у движущегося сгустка заряда приводит лишь к небольшому изменению энергии переходного излучения и не сказывается на его спектре.

Ток, возбуждаемый диполем, имеет вид $\vec{j} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$, а его Фурье-компонента

$$\vec{j}_\omega = \frac{i\omega \vec{p}_0}{2\pi v} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0). \quad (2)$$

Одно из уравнений Максвелла дает выражение для Фурье-компоненты заряда точечного диполя

$$\rho_\omega = -\frac{p_0}{2\pi v} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \delta'(x-x_0) \delta(y-y_0) \quad (3)$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом работы [6]. Именно, в качестве потенциалов, описывающих поле излучения, выберем продольные составляющие электрического и магнитного векторов $\vec{E}_{\omega z}$ и $\vec{H}_{\omega z}$, где значок ω обозначает Фурье-составляющую соответствующей величины. Первая из этих величин описывает ТМ тип колебаний, вторая — ТЕ.

Электромагнитное поле в резонаторе будем искать в виде суммы продольного и поперечного электрического и магнитного полей

$$\vec{E}_\omega = \vec{E}_{\omega\perp} + \vec{E}_{\omega z}, \quad \vec{H}_\omega = \vec{H}_{\omega\perp} + \vec{H}_{\omega z}, \quad (4)$$

где значок $\perp$ указывает на поперечное поле в резонаторе.

Подставляя искомый вид решения в уравнения Максвелла, для продольных полей $\vec{E}_{\omega z}$ и $\vec{H}_{\omega z}$ получаем следующие уравнения:

$$\Delta_2 E_{\omega z} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 E_{\omega z}}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon_2 E_{\omega z} = \frac{4\pi}{\varepsilon_1} \frac{\partial \rho_\omega}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\Delta_2 H_{\omega z} + \frac{\partial^2 H_{\omega z}}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon_1 = -\frac{4\pi}{c} \text{rot}_z \vec{j}_\omega, \quad (6)$$

где $\vec{j}_\omega$ и ρ_ω находятся по формулам (2) и (3).

Для поперечных полей имеем:

$$\Delta_2 \vec{E}_{\omega\perp} = ik \text{rot} \vec{H}_{\omega z} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \nabla_2 \frac{\partial E_{\omega z}}{\partial z} + \frac{4\pi}{\varepsilon_1} \nabla_2 \rho_\omega, \quad (7)$$

$$\Delta_2 \vec{H}_{\omega\perp} = -\nabla_2 \frac{\partial H_{\omega z}}{\partial z} - ik \varepsilon_2 \text{rot} \vec{E}_{\omega z}. \quad (8)$$

Учитывая идеальную проводимость стенок резонатора, получаем следующие граничные условия:

$$\vec{E}_{\omega\perp} \Big|_{z=0} = 0 \quad (9), \quad \vec{H}_{\omega z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (10)$$

на торцах резонатора, и

$$E_z|_z = 0 \quad (11), \quad \frac{\partial H_{\omega z}}{\partial n}|_z = 0 \quad (12)$$

на поверхности волновода.

Для решения уравнения (5) с граничным условием (11) и уравнения (6) с граничным условием (12) используем разложения дельта-функций в ряд по соответствующим системам ортонормированных функций. Для каждой потенциальной функции оказываются справедливыми следующие представления:

$$E_{\omega z} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) \psi_n(x, y) \frac{\partial \psi_n(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad (13)$$

$$A_n(z) = a_n e^{-i \frac{\omega}{v} z} + A_n^- e^{i \gamma_n^0 z} + A_n^+ e^{-i \gamma_n^0 z}, \quad (14)$$

$$H_{\omega z} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(z) \psi_n(x, y) \frac{\partial \psi_n(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad (15)$$

$$B_n(z) = b_n e^{-i \frac{\omega}{v} z} + B_n^- e^{i \gamma_n^0 z} + B_n^+ e^{-i \gamma_n^0 z}, \quad (16)$$

где $\psi_n(x, y)$, λ_n , μ_n — собственные функции и собственные значения соответственно первой и второй краевых задач для поперечного сечения волновода,

$$\gamma_n^e = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} (k^2 \varepsilon_2 - \lambda_n^2)}, \quad \gamma_n^0 = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 - \mu_n^2} \quad (17)$$

— постоянные распространения волн типа ТМ и ТЕ в волноводе с анизотропным заполнением.

Первые слагаемые в выражениях (14) и (16) описывают собственное поле движущегося источника в неограниченном волноводе, а остальные слагаемые — прямые и отраженные волны, возникающие из-за наличия торцов резонатора. Так же, как в [2—4], можно показать, что коэффициенты a_n и b_n имеют вид:

$$a_n = \frac{2i\omega p_0}{\varepsilon_2 v^2 \left(\lambda_n^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\omega^2}{v^2} - k^2 \varepsilon_2 \right)}; \quad (18)$$

$$b_n = \frac{2i\omega p_0}{c v \left(\mu_n^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - k^2 \varepsilon_1 \right)}.$$

Принимая во внимание вид поперечных составляющих полей

$$\vec{E}_{\omega \perp} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\partial A_n}{\partial z} - \frac{4\pi}{\varepsilon_1} \rho_{\omega} \right) \nabla \psi_n(x, y) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ik}{\mu_m^2} B_m [\nabla \psi_m \vec{e}_z], \quad (19)$$

$$\vec{H}_{\omega \perp} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ik\varepsilon_2}{\lambda_n^2} A_n [\nabla \psi_n \cdot \vec{e}_z] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^2} \frac{\partial B_m}{\partial z} \nabla \psi_m(x, y) \quad (20)$$

и граничные условия на торцах резонатора (9), (10), получаем следующие выражения для коэффициентов прямых и отраженных волн:

$$A_n^{\pm} = \frac{p_0 \gamma_n^e (e^{-i \frac{\omega}{v} l} - e^{\mp i \gamma_n^e l})}{\varepsilon_2 v \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \gamma_n^e \right) \sin \gamma_n^e l}; \quad B_n^{\pm} = \mp \frac{e^{-i \frac{\omega}{v} l} - e^{\mp i \gamma_n^0 l}}{2i \sin \gamma_n^0 l} b_n, \quad (21)$$

где b_n описывается формулой (18).

Заметим, что в нашем случае волны типа ТМ соответствуют необыкновенной волне одноосного кристалла, а типа ТЕ — обыкновенной, причем оба типа колебаний оказываются независимыми.

Энергию поля излучения находим по тормозящей силе, действующей на диполь со стороны поля излучения. Не приводя громоздких вычислений, выпишем выражения для потерь энергии движущегося диполя. Соответствующие выражения для необыкновенных и обыкновенных волн имеют вид

$$W_{\text{соб}}^e = - \frac{4p_0^2 \pi l \sqrt{\varepsilon_1}}{v \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial x} \right)^2 \times \left. \frac{\lambda_n}{\sqrt{(\beta^2 \varepsilon_1 - 1)^3} \frac{d}{d\omega} \left[\frac{\omega^2}{\varepsilon_2^2} (\beta^2 \varepsilon_1 - 1) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \lambda_n^2 \right]} \right|_{\omega = \omega_{\text{чер}}^e}, \quad (22)$$

$$W_{\text{соб}}^0 = - \frac{2p_0^2 \pi l v}{c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi_m(M_0)}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{(\beta^2 \varepsilon_1 - 1)^3} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega_2}{v_2} \sqrt{\beta^2 \varepsilon_1 - 1} \right)} \Big|_{\omega = \omega_{\text{чер}}^0} \quad (23)$$

и описывают излучение Вавилова-Черенкова волн типов ТМ и ТЕ движущегося диполя в бесконечном волноводе с анизотропным заполнением на пути длиной l . Черенковское излучение необыкновенных волн в волноводе возникает при условии

$$\frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2 \varepsilon_1 - 1) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \lambda_n^2, \quad (24)$$

а черенковские частоты обыкновенных волн удовлетворяют уравнению

$$\mu_n^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - k^2 \varepsilon_1 = 0, \quad (25)$$

т. е. условием возникновения излучения Вавилова-Черенкова на обыкновенных волнах служит $\beta^2 \varepsilon_1 > 1$.

Излучение на тех и других волнах свободного поля имеет вид

$$W_{\text{св}}^e = - \frac{16p_0^2 \pi^5 \beta^4 \varepsilon_2^2}{l^5 v^2 \varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial x} \right)^2 \times$$

$$\times \sum_s \frac{\omega s^4 \left[1 - (-1)^s \cos \frac{\omega}{v} l \right]}{\lambda_n^2 \left[\lambda_n^2 + \frac{s^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (1 - \beta^2 \varepsilon_1) \right]^2 \cdot \frac{d}{d\omega} \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} (k^2 \varepsilon_2 - \lambda_n^2) \right]} \Bigg|_{\omega=\omega_{ns}^e} - W_{\text{чep}}^e, \quad (26)$$

$$W_{\text{сн}}^0 = - \frac{16 p_0^2 \beta^2 \varepsilon_1^2}{v^2 l^3} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi_m(M_0)}{\partial y} \right)^2 \times \\ \times \sum_s \frac{\omega^3 s^2 \left[1 - (-1)^s \cos \frac{\omega}{v} l \right]}{\mu_m^2 \left[\mu_m^2 + \frac{s^2 \pi^2}{l^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_1) \right]^2 \cdot \frac{d}{d\omega} (\omega^2 \varepsilon_1)} \Bigg|_{\omega=\omega_{ms}^0} - W_{\text{чep}}^0 \quad (27)$$

и складывается из переходного излучения и из черенковского излучения с противоположным знаком, которое при расчете полной энергии излучения уничтожается с $W_{\text{сн}}^0$. Переходное излучение в резонаторе происходит на частотах

$$\omega_{ns}^e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} \sqrt{\lambda_n^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{s^2 \pi^2}{l^2}}; \quad \omega_{ms}^0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} \sqrt{\mu_m^2 + \frac{s^2 \pi^2}{l^2}}, \quad (28)$$

которые являются собственными соответственно для волн типов ТМ и ТЕ. Если подобрать размеры резонатора так, что на собственной частоте той или другой волны выполняется условие возникновения черенковского излучения

$$\frac{\omega_{ns}^e}{v} = \frac{s\pi}{l} \quad (s = 0, 1, 2, \dots), \quad (29)$$

то интенсивность таких гармоник имеет вид

$$W_{ns}^e \text{ чep} = \frac{2 p_0^2 \omega s^2 \pi^3}{\varepsilon_1 l v^2 \lambda_n^2 \cdot \frac{d}{d\omega} \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} (k^2 \varepsilon_2 - \lambda_n^2) \right]} \Bigg|_{\omega=\omega_{ns}^e \text{ чep}} \cdot \left(\frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial x} \right)^2, \quad (30)$$

$$W_{ns}^0 \text{ чep} = \frac{2 p_0^2 \omega s^2 \pi^3}{l \mu_n^2 \cdot \frac{d}{d\omega} (\omega^2 \varepsilon_1)} \Bigg|_{\omega=\omega_{ns}^0 \text{ чep}} \cdot \left(\frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial y} \right)^2. \quad (31)$$

Рассмотрим предельный случай «длинного» резонатора, который зададим условием

$$\frac{\omega}{v} l \gg 1, \quad \gamma_n^e l \gg 1. \quad (32)$$

Это условие хорошо выполняется, если диполь летит с нерелятивистской скоростью и если l велико. В резонаторе возникает квазинепрерывный спектр излучения, расстояние между отдельными линиями которого

$$\Delta \omega_{s, s+1}^0 = \frac{\pi}{l} \frac{d\omega}{d\gamma_n^e} \bigg|_{\omega=\omega_{ns}^0} \quad (33)$$

в среде без дисперсии обратно пропорционально длине резонатора. В этом случае член с $\cos \frac{\omega}{v} l$ в (26), (27) даже в узком интервале частот представляет собой быстро осциллирующую функцию и при усреднении по этому интервалу обращается в нуль. Отсюда, при условии (32), интенсивности отдельных гармоник обыкновенных и необыкновенных волн имеют вид

$$M_{ns}^0 = - \frac{8p_0^2 \pi^3 s^2 \beta^2 \left(\mu_n^2 + \frac{s^2 \pi^2}{l^2} \right)}{l^3 \mu_n^2 \left| \mu_n^2 + \frac{s^2 \pi^2}{l^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_1) \right|^2} \cdot \left(\frac{\partial \psi_n(M_0)}{\partial y} \right)^2, \quad (34)$$

$$W_{ns}^e = - \frac{8p_0^2 \pi^5 \beta^2 \varepsilon_2^2 s^4}{l^5 \varepsilon_1 \lambda_n^2 \left| \lambda_n^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{s^2 \pi^2}{l^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_1) \right|^2} \cdot \left(\frac{\partial \psi_n(M_0)}{dx} \right)^2. \quad (35)$$

Оказывается, что на низких типах колебаний

$$W_{ns}^0 \sim \frac{1}{l^3}, \text{ а } W_{ns}^e \sim \frac{1}{l^5}.$$

Грубо говоря, в „длинном“ резонаторе на низких типах колебаний поперечно ориентированный диполь излучает только обыкновенные волны, в то время как при рассмотрении движения излучателя с продольной составляющей электрического момента [3] при тех же условиях наблюдалось излучение только необыкновенных волн на всех типах колебаний.

Для высших типов колебаний ($s\pi \gg l$) интенсивности излучения гармоник обоих типов волн — одного порядка и пропорциональны $\frac{\pi^5 s^4}{l^5}$.

При выполнении условий (24), (25) и (32) в квазинепрерывном спектре переходного излучения на тех или других волнах вблизи по является острый пик излучения Вавилова-Черенкова, причем максимальная частота этого пика определяется (30) или (31). При отсутствии дисперсии интенсивности гармоник черенковского излучения в „длинном“ резонаторе пропорциональны $\frac{1}{l}$, т. е. они больше интенсивностей переходного излучения и, кроме того, имеет место соотношение

$$W_{ns}^0 \text{ чер} \approx \beta^2 \varepsilon_1 W_{ns}^e \text{ чер},$$

где $\beta^2 \varepsilon_1 > 1$ в силу условий излучения Вавилова-Черенкова.

В „коротком“ резонаторе, который зададим условиями

$$\frac{\omega}{v} l \ll 1, \quad \gamma_n^e l \ll 1,$$

интенсивности гармоник быстро падают с ростом индекса s на тех и других волнах, но неодинаково. Например, при $s = 1$ с учетом дополнительных условий $\lambda_n^2 l^2 \ll 1$, $\mu_n^2 l^2 \ll 1$ имеем

$$\frac{W_{n1}^{(i)}}{W_{n1}^{(e)}} \approx \frac{\lambda_n^2}{\mu_n^2} \varepsilon_1.$$

Московский государственный педагогический
институт им. В. И. Ленина

Поступила 30.III.1971

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Колпаков, В. И. Котов, ЖФТ, 34, 1387 (1964).
2. А. С. Адамчук, Л. Г. Нарышкина, Вопросы излучения движущихся источников электромагнитных и акустических волн. Ученые записки, № 312 МГПИ им. В. И. Ленина, М., 1969, стр. 3.
3. А. С. Адамчук. Там же, стр. 11.
4. А. С. Адамчук, Л. Г. Нарышкина, Вопросы методики преподавания физики в вузе и школе. Материалы X зональной научно-методической конференции преподавателей пединститутов Урала, Сибири и Дальнего Востока, стр. 87, Омск, 1969.
5. А. С. Адамчук, Л. Г. Нарышкина, Изв. вузов, Радиофизика (в печати).
6. Л. Г. Нарышкина, К. А. Барсуков, ЖТФ, 33, 444 (1963),

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՎ ՌԵԶՈՆԱՏՈՐՈՒՄ
ԱՌԱՋԱՅՈՂ ԱՆՅՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա. Ս. ԱԴԱՄՉՈՒԿ, Լ. Գ. ՆԱՐԻՇԿԻՆԱ

Դիտարկվում է անիզոտրոպ միջավայրով իզեալ ցիլինդրիկ ռեզոնատորի գրգռումը թանձրուկի անցման ժամանակ առաջացող անցումային ճառագայթման օգնությամբ:

ON THE THEORY OF TRANSITION RADIATION IN THE RESONATOR WITH ANISOTROPIC MEDIUM

A. S. ADAMCHOOK, L. G. NARISHKINA

The theory of the transition radiation in the resonator is considered. The resonator is made of regular section waveguide bounded by two metal plates and is filled up with an anisotropic medium. The charged particle is assumed to move along the axis of the resonator and to have an electric moment. The formulas for the radiation field and radiation energy are derived. The possibility of the existence of Vavilov-Cheerenkov radiation in the resonator is discussed as well.