

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ УГЛОВЫХ СТРУКТУР ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ИНДИКАТРИС МАЛОУГЛОВОГО РАССЕЯНИЯ

Г. М. АЙВАЗЯН, Э. А. ЭЛОЯН

В работе предложены две асимптотические формулы полидисперсных индикатрис малоуглового рассеяния для различных гамма-распределений частиц по размерам ($0 < \nu < 10$) и для всей области изменения переменной μ ($0 < \mu < \infty$). Первая из формул может быть использована для грубых расчетов, а вторая для более точных.

1. Исследование рассеяния света полидисперсной системой под малыми углами приводит к вычислению определенного класса интегралов, содержащих квадрат бесселевой функции первого порядка и параметры распределения частиц по размерам. Вычисление этих интегралов для всей области изменения аргумента представляет определенные трудности, поэтому в практике обычно используют несколько приближенных формул.

В работе получена простая асимптотическая формула, хорошо аппроксимирующая значение вышеуказанного интеграла для различных видов гамма-распределений частиц по размерам во всей области изменения переменной μ ($0 < \mu < \infty$). Введение дополнительных коэффициентов в указанную формулу позволило получить вторую асимптотическую формулу, которой следует пользоваться для более точных расчетов.

2. Спектральная интенсивность света $I(\beta, \lambda)$, рассеянного под определенным углом β полидисперсной системой из сферических частиц с функцией распределения $f(a)$, имеет вид [1]

$$I(\beta, \lambda) = \pi J_0 \int_0^{\infty} F(\rho, \beta) f(a) a^2 da, \quad (1)$$

где J_0 — интенсивность падающего света, $F(\rho, \beta)$ — оптический поперечник частиц, параметр $\rho = \frac{2\pi a}{\lambda}$.

Если частицы крупные ($\rho \gg 1$), т. е. для малых углов рассеяния β , имеем

$$F(\rho, \beta) = \frac{1}{\pi \beta^2} J_1^2(\rho, \beta) \quad (2)$$

или

$$I(\beta, \lambda) = \frac{J_0}{\beta^2} \int_0^{\infty} J_1^2(\rho, \beta) f(a) a^2 da, \quad (3)$$

где $J_1^2(\rho, \beta)$ — квадрат бесселевой функции первого порядка.

В качестве функции распределения $f(a)$ рассмотрим гамма-распределение

$$f(a) = \frac{\Delta^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} a^\nu e^{-\Delta a}, \quad (4)$$

которое в достаточно большом интервале размеров хорошо аппроксимирует логарифмически-нормальное распределение и тем лучше, чем выше индекс ν распределения.

Тогда (3) можно представить [2] в виде

$$I(\beta, \lambda) = I_0 \Phi_\nu^*(\mu), \quad (5)$$

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{\pi^2 \Gamma(\nu+5) \bar{a}^4}{(\nu+1)^4 \lambda^2 \Gamma(\nu+1)}, \quad (6)$$

где I_0 — интенсивность света, рассеянного прямо вперед ($\beta = 0$). Функция $\Phi_\nu^*(\mu)$ характеризует угловую структуру полидисперсных индикатрис:

$$\Phi_\nu^*(\mu) = \frac{4}{\Gamma(\nu+5)} \mu^{\nu+5} \varphi_{\nu+2}(\mu), \quad (7)$$

$$\varphi_k(\mu) = \int_0^\infty J_1^2(z) z^k e^{-\mu z} dz, \quad (8)$$

$$\mu = \frac{\Delta \lambda}{2\pi} \cdot \frac{1}{\beta} \quad z = \rho \beta \quad k = \nu + 2.$$

Функция $\varphi_k(\mu)$ подобна δ -функции и ее вычисление для малых значений μ представляет определенные трудности. Исследования [3, 4] показали, что вместо точной формулы (8) для вычислений $\varphi_k(\mu)$ можно использовать приближенные выражения [ряды (18) и (30) из [4]], которые при переходе к функциям $\Phi_\nu(\mu)$ дают [2]:

для $\mu \gg 1$ (область малых β)

$$\Phi_\nu(\mu) = 1 - \frac{\Gamma(\nu+7)}{4\Gamma(\nu+5)} \cdot \frac{1}{\mu^2} + \frac{5\Gamma(\nu+9)}{192\Gamma(\nu+5)} \cdot \frac{1}{\mu^4} - \dots, \quad (9)$$

для $\mu \ll 1$ (область больших β)

$$\Phi_\nu(\mu) = \frac{4\mu^3}{\pi(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)} \left[1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\nu(\nu+1)} \mu^2 - \dots \right]. \quad (10)$$

Функцию $\Phi_\nu(\mu)$ можно вычислить и по следующей приближенной формуле:

$$\Phi_\nu(\mu) = \frac{2\mu^2}{(\nu+4)} \left[\frac{J_1^2\left(\frac{x_1}{\mu}\right)}{x_1} + \frac{J_1^2\left(\frac{x_2}{\mu}\right)}{x_2} \right], \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 4 + \nu \pm \sqrt{4 + \nu},$$

которая непосредственно следует из выражений (7, 5, 3) в [5]. На рис. 1 приведены функции $\lg \Phi_{10}^*(\mu)$, рассчитанные для $\nu = 10$ по точной формуле (7) и по приближенным формулам (9), (10) и (11). Как и следовало ожидать, допуская, для достаточно малого интервала

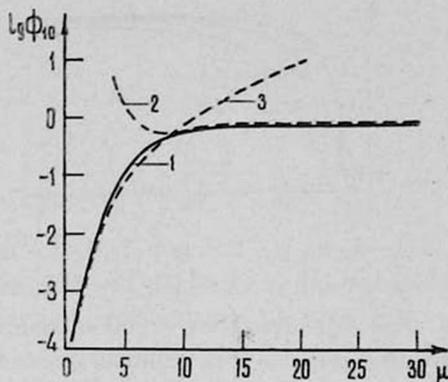


Рис. 1. 1 — $\lg \Phi_{10}^*(\mu)$ по (7), 2 — $\lg \Phi_{10}(\mu)$ по (9),
3 — $\lg \Phi_{10}(\mu)$ по (10).

значений μ , погрешность, не превышающую 5%, формулой (9) можно пользоваться для вычислений $\Phi_{10}(\mu)$ в области $\mu > 13$, а формулой (10) — в области $\mu < 4$. Для значений μ из интервала $4 \leq \mu \leq 13$ функцию $\Phi_{10}^*(\mu)$ можно вычислить [2] по формуле (11), поскольку значения $\Phi_{10}^*(\mu)$ достаточно точно совпадают с $\Phi_{10}(\mu)$ по (11) для любых μ . Таким образом, используя приближенные формулы (9), (10) и (11) можно рассчитать $\Phi_{10}(\mu)$ для всей области $0 < \mu < \infty$.

3. В некоторых задачах, как, напр., в [2], недостаточно получить численные значения интегралов, требуются конечные формулы для анализа, а для этого необходимо иметь простую аналитическую формулу $\Phi_{\nu}(\mu)$ для всей области изменения μ .

Ограничим ряд (10) вторым членом — $\Phi_{\nu}^0(\mu)$ и составим выражение

$$\Phi_{\nu}^1(\mu) = \frac{\Phi_{\nu}^0(\mu)}{1 + \Phi_{\nu}^0(\mu)}, \quad (12)$$

$$\Phi_{\nu}^0(\mu) = A\mu^3(1 + B\mu^2), \quad (13)$$

$$A = \frac{4}{\pi(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)} \quad B = \frac{3}{8\nu(\nu+1)}.$$

На рис. 2 приводятся функции $\lg \Phi_{\nu}^1(\mu)$ для $\nu = 2, 5$ и 10 по (7) и $\lg \Phi_{\nu}^1(\mu)$ для тех же значений ν по формуле (12). Для всех рассмотренных значений ν расчеты по формуле (12) почти точно ($\sim 2\%$) совпадают с расчетом по точной формуле (7) в областях $\mu \ll 1$ и $\mu \gg 1$.

Для $\nu = 2$ во всей области $0,8 < \mu < 30$ значения $\lg \Phi_2^1(\mu)$ несколько велики по сравнению с $\lg \Phi_2^0(\mu)$, отклонение проходит через максимум при $\mu = 5$ (см. рис. 2) и максимальная ошибка составляет 29%.

Для $\nu = 5$ в области $0,5 < \mu < 40$ значения $\lg \Phi_5^*(\mu)$ в некоторых участках малы, а в других велики по сравнению с $\lg \Phi_5^*(\mu)$, а максимальное отклонение ($\mu = 4$) составляет 27% .

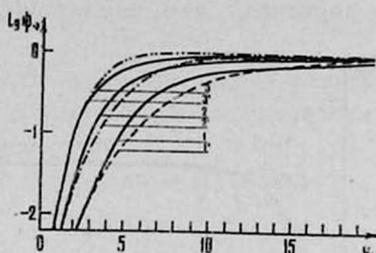


Рис. 2. 1 — $\lg \Phi_{10}^*(\mu)$, 1' — $\lg \Phi_{10}^*(\mu)$, 2 — $\lg \Phi_5^*(\mu)$,
2' — $\lg \Phi_5^*(\mu)$, 3 — $\lg \Phi_2^*(\mu)$, 3' — $\lg \Phi_2^*(\mu)$.

Для $\nu = 10$ во всей области $0,5 < \mu < 60$ величины $\lg \Phi_{10}^*(\mu)$ несколько велики по сравнению с $\lg \Phi_{10}^*(\mu)$, ошибка проходит через максимум при $\mu = 6$ и не превышает 40% .

Для более точных расчетов формулу (12) можно несколько преобразовать:

$$\Phi_\nu^*(\mu) = (1 + N) \frac{\Phi_\nu^0(\mu)}{1 + \Phi_\nu^0(\mu)}, \quad (13)$$

$$N = A_1(\nu) \frac{k_1^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} \mu^\nu e^{-\mu/k_1} - A_2(\nu) \frac{k_2^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} \mu^\nu e^{-\mu/k_2}, \quad (14)$$

$$k_1 = \frac{6}{\nu}, \quad k_2 = 3.$$

Как показали расчеты, логарифмы коэффициентов A_1 и A_2 линейно зависят от ν (см. рис. 3). Выбор коэффициентов k_1 обусловлен необходимостью сохранения максимума первого члена (14) в области $\mu \sim 6$ для всех рассматриваемых значений ν , а выбор k_2 — необходимостью перемещения максимума

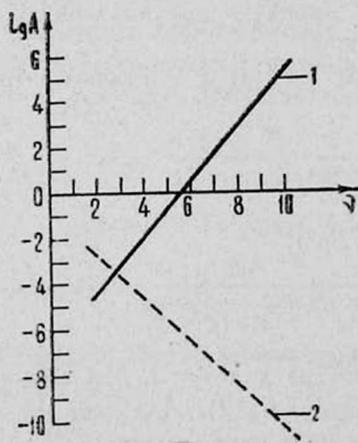


Рис. 3. 1 — $\lg A_1(\nu)$,
2 — $\lg A_2(\nu)$.

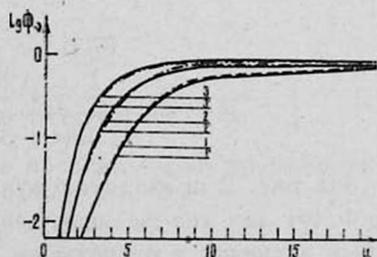


Рис. 4. 1 — $\lg \Phi_{10}^*(\mu)$, 1' — $\lg \Phi_{10}^*(\mu)$,
2 — $\lg \Phi_5^*(\mu)$, 2' — $\lg \Phi_5^*(\mu)$,
3 — $\lg \Phi_2^*(\mu)$, 3' — $\lg \Phi_2^*(\mu)$.

второго члена (14) в область больших значений μ с увеличением величины ν .

В таблице даны значения A_1 , A_2 , k_1 , k_2 для интересующих нас трех значений $\nu = 2, 5$ и 10 .

Таблица

ν	A_1	A_2	k_1	k_2
2	$4,5 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	3	3
5	$2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-6}$	1,2	3
10	$3 \cdot 10^{+5}$	$5 \cdot 10^{-11}$	0,6	3

На рис. 4 приведены функции $\lg \Phi^*(\mu)$ по формуле (7) и соответствующие им функции $\lg \Phi_\nu^*(\mu)$ по формуле (13) для различных значений $\nu = 2, 5$ и 10 . Отклонение $\lg \Phi_\nu^*(\mu)$ от $\lg \Phi^*(\mu)$ теперь уже незначительно и в области $2 < \mu < 10$. Для всех рассмотренных выше ν и μ ошибка не превышает 7% за исключением резкого скачка при $\mu \sim 3$ ($\nu = 5$), где отклонение $\sim 20\%$.

Институт радиопизики и электроники
АН АрмССР

Поступила 20.III.1971

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. К. С. Шифрин, Труды V Межведомственной облачной конференции, Гидрометеопиздат, Л., 19, 1957.
2. К. С. Шифрин, Г. М. Айвазян, Труды ГГО, вып. 153, 132, 1964.
3. К. С. Шифрин, Труды ВЭЛТИ, вып. 2, 1956.
4. К. С. Шифрин, Е. П. Новосельцев, Труды ГГО, вып. 100, 25, 1960.
5. В. И. Крылов, Приближенные вычисления интегралов. Физматгиз., М., 1959.

ՓՈՔՐ ԱՆԿՅԱՆ ՏԱԿ ՑՐՄԱՆ ՊՈՂԻԳԻՍՊԵՐՍ ԻՆԴԻԿԱՏՐԻՍԱՏՐԻՍՍՅԻ
ԱՆԿՅՈՒՆԱՅԻՆ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԲԱՆԱԶԵՎԵՐ

Հ. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ, Զ. Ա. ԷԼՅԱՆ

Աշխատանքում ներկայացված են փոքր անկյան տակ ցրման պոլիդիսպերս խնդիրներին համարված անկյունային կառուցվածքի երկու ասիմպտոտիկ բանաձևեր մասնիկների տարրեր ($0 < \nu < 10$) տեղաբաշխման և μ -ի փոփոխման ամբողջ ($0 < \mu < \infty$) տիրույթի համար:

Բանաձևերից առաջինը (12) կարելի է օգտագործել կոպիտ հաշվումների համար, իսկ երկրորդը (13) ավելի ճշգրիտ հաշվումների համար:

ASIMPTOTIC FORMULAS OF ANGULAR STRUCTURES OF POLYDISPERSED INDICATRICES OF SMALL ANGLE SCATTERING

H. M. AIVAZIAN, Z. A. ELOYAN

Two asymptotic formulas of angular structures of polydispersed indicatrices of small-angle scattering for different distributions of particles according to their size ($0 < \nu < 10$) and for all the field of variable alteration μ ($0 < \mu < \infty$) are suggested in the work. The first formula (12) can be used for rough calculation, the second one (13) for a more precise one.