Изв. АН Армянской ССР, Физика, 6, 288—296 (1971)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Э.Д.С. И РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛЕНКИ

Ф. А. ГРИГОРЯН, А. А. ДАРБИНЯН

Рассматривается случай воздействия поля в направлении оси трудного намагничивания.

Получены аналитические выражения э.д.с., приводятся экспериментальные и расчетные кривые для цилиндрических пленок электролитического осаждения при фронтах перемагничивающего импульса от 20 до 100 *нсек* и постоянной амплитуде, превышающей поле анизотропии в 1,5—4 раза.

Дается методика определения коэффициента вязкости пленок, сопоставляются пленки толщиной 4000, 8000, 16000 Å.

Исходя из требований к прикладной задаче, представленной дифференциальным уравнением перемагничивания пленки, ставится общая задача и приводится приближенное решение обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в случае явно выделяемой области больших значений второй производной. Полученные аналитические решения сопоставляются с частными решениями, полученными на ЭВМ.

Когерентное вращение намагниченности может иметь место в ферромагнитных анизотропных плоских пленках вакуумного напыления толщиной до 3000 Å и в цилиндрических пленках электролитического осаждения толщиной до 8000 Å. Коэффициент затухания в этих пленках меняется в пределах от 0,01 до 1.

В работах [1—2] на основе уравнения Ландау-Лифшица с помощью ЭВМ получены частные кривые зависимости э.д.с. от времени при затухании, близком к 0,01.

В работе [3] приводится аналитическое выражение зависимости э.д.с. от положения вектора намагниченности при постоянных внешних полях.

С учетом размагничивающих полей, согласно [4], положение вектора намагниченности представляется уравнениями

$$\dot{\varphi} = -\frac{\gamma}{M(1+\alpha^2)}\left[\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial E}{\partial\psi} + \alpha\frac{\partial E}{\partial\varphi}\right], \qquad (1)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\gamma}{M(1+\alpha^2)}\left[\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial E}{\partial\varphi} - \frac{\alpha}{\sin^2\varphi}\frac{\partial E}{\partial\psi}\right], \qquad (2)$$

где φ — угол поворота вектора намагниченности;

γ — гиромагнитное отношение;

M — намагниченность насыщения;

α — коэффициент затухания;

E — магнитная энергия пленки.

При перемагничивании угол ψ выхода вектора намагниченности из плоскости пленки меняется всего на несколько градусов из-за больших размагничивающих полей. Приравняв $\dot{\psi}$ к нулю в левой части выражения (2) и подставив значение $\frac{\partial E}{\partial \psi}$ из (2) в (1), после исключения α известной подстановкой $\lambda = \alpha\gamma M$, получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\gamma^2}{\lambda}\frac{\partial E}{\partial \varphi}. \tag{3}$$

Решение не содержит явного ограничения на α, что позволяет утверждать о правомерности выражения (3) и при больших α.

В работе [5] приводится выражение, показывающее совпадение частного случая выражения (3) с решением, полученным в работе [6] для больших трений.

Влияние вихревых токов определено в работе [5] введением дополнительного коэффициента в выражении (3) после совместного решения уравнения перемагничивания пленки с уравнениями Максвелла.

В работе [7] для случая постоянства величины приложенных внешних полей получена зависимость $t = f(\varphi)$, однако, сложность разрешения относительно φ затрудняет определение э.д.с. пленки.

В работе [8] приводится аналитическое выражение зависимости э.д.с. от времени без учета трения в случае линейного нарастания поля.

Рассмотрим приближенное аналитическое решение выражения (3) при двух исходных условиях.

1. В случае линейно нарастающего внешнего поля, направленного по оси трудного намагничивания, выражение (3) примет вид

$$\frac{a}{T}\frac{d\varphi}{d\tau} = (\tau - \sin\varphi)\cos\varphi, \tag{4}$$

где

$$a = \frac{\lambda}{\gamma^2 M H_k}; \qquad \tau = \frac{t}{T};$$

H_k — напряжение анизотропии;

T — время нарастания поля до значения $H = H_k$.

Для малых углов φ, принимая $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$, уравнение (4) представится в виде

$$\frac{a}{T}\frac{d\varphi}{dt} = \tau - \varphi, \tag{5}$$

решением которого является выражение

$$\varphi = \tau - \frac{a}{T}\left(1 - e^{-\frac{T}{a}\tau}\right). \tag{6}$$

На рис. 1 приведены точные частные решения дифференциального уравнения (4) для разных a/T, полученных на ЭВМ „Наири-2“.

Пунктирной линией показаны решения согласно выражению (6). Кривые близки до $\varphi = 1, 2$ и резко расходятся при больших углах. Отсутствие верхних загибов у пунктирных кривых исключает возможность определения пиковых значений э.д.с. на основе выражения (6).

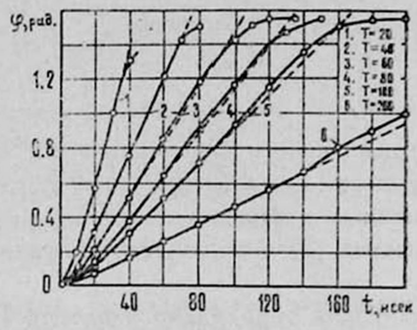

Рис. 1. Кривые зависимости угла поворота вектора намагниченности от времени при разных коэффициентах a/T, определяемых скоростью нарастания поля по трудной оси намагничивания. ——— кривые решения уравнений (4) на ЭВМ, — — — кривые аналитического решения приближенного дифференциального уравнения (5) согласно выражению (6).

Итерация выражения (4) на основе (6) приводит к расходящемуся ряду. Классические методы приводят к неразрешимому случаю дифференциального уравнения Абеля третьего рода. Уравнение (4) решено приближенно.

В приложении приводится полученное Григоряном Ф. А. приближенное решение обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в случае выделения области больших значений второй производной.

Согласно приложению, уравнение (4) преобразуется к виду

$$\left(\frac{d\varphi_1}{d\tau}\right)^2 + \frac{T\cos^3\varphi_1}{a\sin\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{d\tau} - \frac{T\cos^2\varphi_1}{a\sin\varphi_1} = 0, \tag{7}$$

где φ_1 — решение, соответствующее y_1.

Решая уравнение (7) относительно $\frac{d\varphi_1}{d\tau}$, получим

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \frac{2\cos\varphi_1}{\cos^2\varphi_1 + \sqrt{\cos^4\varphi_1 + \frac{4a}{T}\sin\varphi_1}}. \tag{8}$$

Полное приближенное решение выражения (4), согласно приложению, представляется как

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{2\cos\varphi}{\cos^2\varphi + \sqrt{\cos^4\varphi + \frac{4a}{T}\sin\varphi}} e^{-\sqrt{\frac{2T}{a}}\varphi}. \tag{9}$$

На рис. 2 приведены кривые, соответствующие решениям уравнений (4) и (9) с помощью ЭВМ „Наири-2". Сопоставление кривых показывает приемлемость замены исходного дифференциального уравнения (4) дифференциальным уравнением (9) с разделенными переменными с точки зрения э.д.с пленки.

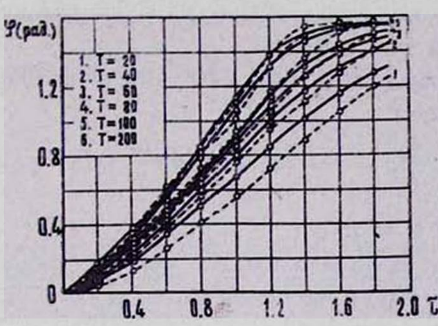

Рис. 2. Кривые зависимости угла поворота вектора намагниченности от времени при разных фронтах T. — — — соответствует решению уравнения (4), ——— соответствует решению уравнения (9).

Исходным для определения э.д.с. E_1 в витке, охваченном пленкой, является выражение

$$E_1 = -4\pi SM \frac{d}{dt} \cos\varphi \cdot 10^{-8}, \tag{10}$$

где S — площадь продольного сечения пленки.

Умножив обе стороны уравнения (9) на $\sin\varphi$, с учетом (10), получим

$$E_1 = -4\pi SM \frac{1}{T}\left(\frac{\sin 2\varphi}{\cos^2\varphi + \sqrt{\cos^4\varphi + \frac{4a}{T}\sin\varphi}} - \sin\varphi\, e^{-\sqrt{\frac{2T}{a}}\varphi}\right)\cdot 10^{-8}. \tag{11}$$

При определении из (11) пикового значения э.д.с второй член правой части не учитывается, если $\frac{a}{T} < 0,5$, так как затухание его быстрое.

Условие максимума э.д.с. $\frac{\partial E_1}{\partial\varphi} = 0$ совместно с (11), приводит к приближенной связи

$$\sin\varphi_m = 1 - 0,44\frac{a}{T}\cdot \tag{12}$$

Время максимума э.д.с. определится подстановкой (12) в (6). В случае быстрого затухания экспоненты получим

$$\tau_m = \varphi_m + \frac{a}{T} = 1 + 0,54\frac{a}{T}\cdot \tag{13}$$

Максимальная э.д.с. представляется выражениями (11) и (12). При $T \geqslant 20$ *нсек* $\varphi_m = 1$, тогда, согласно выражению (11), получим

$$E_m = 1{,}6\,\pi SM \frac{1}{T} \cdot 10^{-8}. \tag{14}$$

Покажем, что непосредственно из экспериментальных кривых можно определить a и тем самым λ.

Согласно выражениям (6) и (10), после затухания экспоненциальной слагающей имеем

$$E_1 = -4\pi SM\left(\tau - \frac{a}{T}\right)\cdot 10^{-8}, \tag{15}$$

откуда при $E_1 = 0$ $t_1 = a$.

Касательная к кривой э.д.с. на участке переднего фронта, где уже отсутствует влияние экспоненты, отделяет от оси времени t участок t_1, пропорциональный a.

На рис. 3 приведены расчетные, согласно выражениям (11) и (6), и экспериментальные кривые зависимости э.д.с. от времени при раз-

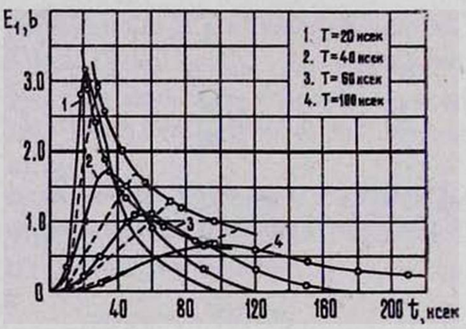

Рис. 3. Кривые зависимости э.д.с. от времени и огибающие их амплитуды. ——— экспериментальные, – – – расчетная кривая, согласно (11) и (6).

ных фронтах T внешнего поля, направленного по оси трудного намагничивания.

Рассмотрены электролитические цилиндрические пленки с $\lambda = 33\cdot 10^{8}$ *гц*, $\gamma = 10^{7}\cdot 1/сек$, $M = 840$ *гс*, $H_k = 4э$, $H_c = 0{,}3$ э, амплитудной дисперсией 20%, углом дисперсии $4°$.

2. В случае постоянной величины приложенного поля перемагничивания согласно (3)

$$t = a\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi\,(h_T - \sin\varphi)}, \tag{16}$$

где

$$h_T = \frac{H_T}{H_k}.$$

Решением (16) является выражение

$$t = \frac{a}{h_T^2 - 1}\left[h_T \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \ln \frac{h_T \cos\varphi}{h_T - \sin\varphi}\right]. \tag{17}$$

При полях h_T от 1,5 до 6 второй член правой части выражения (17) имеет величину не более 0,3 от первого.

Пренебрегая вторым членом выражения (17), получим

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=e^{\frac{h^2_T-1}{ah_T}t}. \tag{18}$$

Подстановка значения φ из (18) в (10) дает

$$E_2=-M\frac{S}{a}\left(h_T^2-1\right)e^{-(h_T-1)\frac{t}{a}}\left[1-e^{-2\left(h_T^2-1\right)\frac{t}{a}}\right]\left[1+e^{-2\left(h_T^2-1\right)\frac{t}{T}}\right]^{-2} \tag{19}$$

где E_2 — э.д.с. в витке, охваченном пленкой по оси трудного намагничивания при постоянстве приложенного внешнего поля h_T.

Пиковое значение э.д.с. E_{2m} определяется без ограничений на h_T. Совместным решением выражений (3) и (10) получим

$$E_2=\frac{MS}{2a}\sin 2\varphi(\sin\varphi-h_T)\cdot 10^{-8}. \tag{20}$$

Угол φ_{2m}, соответствующий максимальной э.д.с., определится из условий $\frac{\partial E_2}{\partial\varphi}=0$ в виде

$$\sin^3\varphi_{2m}-\frac{2}{3}h_T\sin^2\varphi_{2m}-\frac{2}{3}\sin\varphi_{2m}+\frac{h_T}{3}=0. \tag{21}$$

Уравнение (21) весьма точно аппроксимируется выражением

$$\sin\varphi_{2m}=0{,}7\left(1-e^{-h_T}\right). \tag{22}$$

Подставляя (22) в (17), получим

$$t_{2m}=\frac{a}{h_T^2-1}\left[\frac{h_T}{2}\ln\frac{1{,}7\left(1-0{,}7e^{-h_T}\right)}{0{,}3-0{,}7e^{-h_T}}-\ln\frac{h_T\sqrt{1-0{,}7^2\left(1-e^{-h_T}\right)^2}}{h_T-0{,}7\left(1-e^{-h_T}\right)}\right]. \tag{23}$$

E_{2m} определяется подстановкой (22) в (20). Экспериментальные кривые, приведенные на рис. 4, для цилиндрических пленок электролитического осаждения не дают большого расхождения с расчетными.

Для определения влияния толщины пленки на коэффициент затухания сопоставлены пленки трех толщин.

На рис. 5 приведены статические петли гистерезиса и кривые зависимости э.д.с от времени при толщинах магнитного слоя 8000 и 16000 Å. На осциллограмме каждому делению по горизонтали соответствует 15 *нсек*. Фронт перемагничивающего импульса, направленного по оси трудного намагничивания, достигает H_k за 40 *нсек*. По методике, приведенной в статье, из осциллограмм следует, что коэффициенты затухания в начале перемагничивания отличаются в 2 раза. Коэффициенты затухания при 4000 и 8000 Å не отличаются.

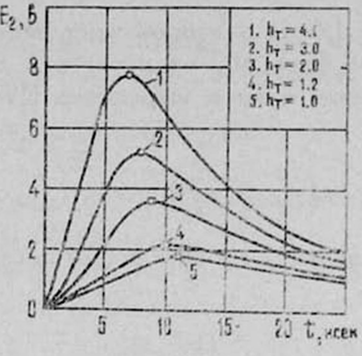

Рис. 4. Экспериментальные кривые зависимости э.д.с. от времени при разных величинах напряженности внешних полей.

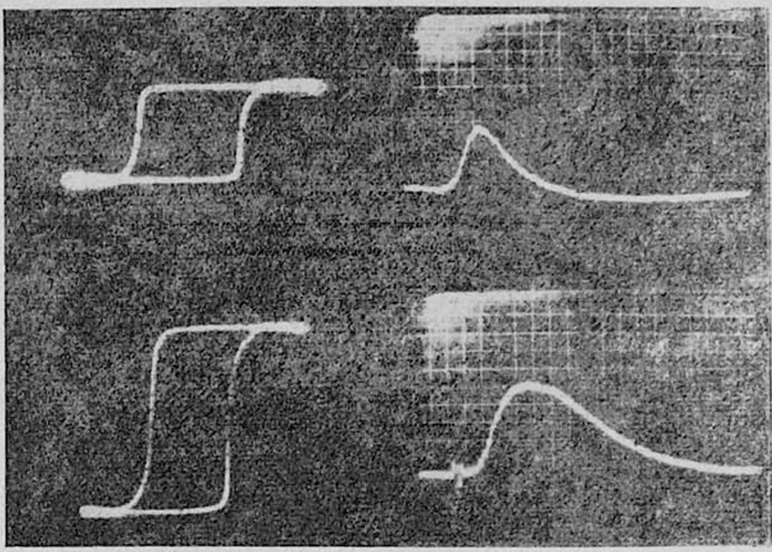

Рис. 5. Статические петли гистерезиса и кривые зависимости э.д.с от времени для пленок толщиной 8000 и 16000 Å.

Приведенные экспериментальные кривые э.д.с. сфотографированы с осциллографа С1-19Б со стробоскопической приставкой С1-21. Верхняя граница полосы пропускания устройства не менее 200 *мгц*.

Авторы благодарят к. т. н. Едигаряна А. А. за представленные экспериментальные образцы разработанных им цилиндрических анизотропных пленок.

Приложение

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В ряде прикладных задач, представляемых обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, искомая функция имеет ограниченную область больших значений второй производной. Покажем возможность аналитического решения в этих случаях.

Исходным является нелинейное дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{f}(x, y). \tag{1}$$

Вторая производная от y, согласно (1), представляется выражением

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{2}$$

Обозначим через y_1 решение уравнения (2) без правой части:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial y_1}\,\frac{dy_1}{dx} = 0. \tag{3}$$

Если уравнение (1) разрешимо относительно y (или x), то y_1 определяется подстановкой y (или x) из уравнения (1) в (3). После этого уравнение (3) приводится к квадратуре, если оно разрешимо относительно $\frac{dy}{dx}$.

Найдем решение y_2 уравнение (2) не для всего интервала изменения аргумента, а в области наибольших значений $\frac{d^2y}{dx^2}$. Наличие такой зоны можно установить исходя из приближенного представления процесса, описываемого уравнением, или же из частных решений, полученных на ЭВМ.

Для окрестности точки x_0, y_0, представляющей центр рассматриваемой области, согласно (2), получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\left.\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}\right|_{x_0,\,y_0} + \left.\frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial y_2}\right|_{x_0,\,y_0}\frac{dy_2}{dx} = \frac{d^2y_2}{dx^2}. \tag{4}$$

Обозначим через y_3 решение уравнения (4), когда правая часть равна нулю, тогда решение исходного уравнения (1) представится в виде

$$y = y_1 + y_2 - y_3. \tag{5}$$

Решение (5) правномерно во всем интервале изменения аргумента.

Действительно, в области, где $\frac{d^2y}{dx^2} \approx 0$, имеем $y_2 - y_3 = 0$, и решение представляется в виде $y = y_1$.

Если область с относительно большим $\frac{d^2y}{dx^2}$ ограниченная и достаточно точно представляется решением (4), где учтены первые члены разложения функции f в ряд, то правая часть уравнения (2) учитывается в решении (5) разностью $y_2 - y_3$.

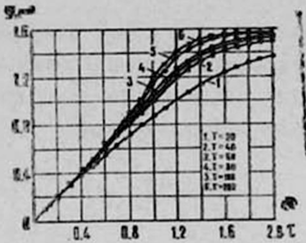

Рис. 6. Решение y_1 уравнения (4), представленное выражением (8).

На рис. 6 приведены кривые, соответствующие решению y_1 прикладной задачи, приводимой в статье, полное решение которой представляется кривыми на рис. 2.

Поступила 5.VII.1971

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. O. Smith*, J. Appl Phys, 29, 264 (1958).
2. *P. R. Gillete, K. Oshima*, J. Appl. Phys. 29, № 10, 1465 (1958).
3. *Ф. А. Григорян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 1, 51 (1966).
4. „Тонкие магнитные пленки". Под редакцией Р. В. Телеснина, М. (1964).
5. *Ф. А. Григорян*, Вопросы радиоэлектроники, сер. 7, ЭВТ, 80—84, вып. 6 (1969).
6. *R. Kikuchi*, J. Appl. Phys. 27, № 11, 1352 (1956).
7. *А. М. Родичев*, Изв. АН СССР, сер. физическая, 5, 614 (1961).
8. *Б. Б. Бардиж*, Магнитные элементы цифровых вычислительных машин, М. (1967).

ՖԵՐՐՈՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԷԼԵԿՏՐԱՇԱՐԺ ՈՒԺԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ, ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ԽՆԴՐԱԴՐՈՒՄՈՎ

Ֆ. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ա. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Դիտվում է դժվար մագնիսացման առանցքի ուղղությամբ ազդման դեպքը։

Բերվում են գլանաձև թաղանթների փորձնական և հաշվային կորերը, երբ վերամագնիսացման իմպուլսի ճակատն ունի 20-ից մինչև 100 նանովայրկյան տևողություն և երբ իմպուլսը մեծ է անիզոտրոպ դաշտից 1,5—4 անգամ։

Տրվում է մածուցիկության գործակցի որոշման մեթոդ և համեմատվում են 4000, 8000 և 16000 անգստրեմ հաստության թաղանթները։

Ելնելով կիրառական խնդրի պահանջներից տրված է ոչ գծային առաջին կարգի սովորական դիֆֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր լուծումը, երբ բացահայտ է երկրորդ ածանցյալի մեծ արժեքների տիրույթը։

Լուծումները ստացվում են էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի միջոցով։

DETERMINATION OF FERROMAGNETIC FILM E.M.F. AND THE ASSOCIATED NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

F. A. GRIGORIAN, A. A. DARBINIAN

Analytic expressions of E.M.F. are obtained; a series of experimental and theoretical curves for electroplated cylindrical films are given.

Starting from considerations of the applied problem, represented by the differential equation of the film remagnetization, a general problem is defined. An approximate solution for simple nonlinear differential equations of the first order is presented in the case of evidently isolated region of high second derivative values.