Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 418—424 (1970)

ГЕНЕРАЦИЯ ЖЕСТКИХ КВАНТОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОНДУЛЯТОРАХ

Н. А. КОРХМАЗЯН

Рассмотрена задача об излучении заряженных релятивистских частиц в поперечном электростатическом синусоидальном поле. Получены формулы для полной излученной энергии и для числа фотонов с единицы пути пролета. Исследован спектр излучения. Он состоит из разных частотных гармоник, каждая из которых имеет определенные пределы и полусумма которых равна частоте максимального излучения. Число испущенных квантов в каждой гармонике при данной амплитуде и при данном периоде внешнего поля постоянно и не зависит от энергии частицы. Интенсивность излучения пропорциональна квадрату энергии частицы. Результаты работы дают возможность измерить энергию быстрых частиц.

1. Существуют несколько методов измерения энергии быстрых заряженных частиц, использующих особенности излучений, возникающих при определенных условиях.

Прежде всего — это эффект Вавилова-Черенкова [1]. Использование этого излучения для регистрации быстрых частиц очень удобно с точки зрения обильности излучения (несколько сот световых квантов с каждого сантиметра пути). Однако слабая энергетическая зависимость сильно ограничивает возможности черенковских счетчиков в области высоких энергий, $E/Mc^2 = \gamma > 10^2$.

Другое явление, которое может быть использовано для регистрации частиц высоких энергий, переходное излучение [2, 3]. Энергетическая зависимость переходного излучения в оптической области частот логарифмическая, а в заоптической—линейная [4, 5]. Для быстрых частиц это излучение сильно направленное [6]. Основная трудность здесь состоит в том, что излучение довольно слабое: испускается около 10^{-2} фотона при одном акте перехода резкой границы двух сред. Поэтому усилия здесь направлены на то, чтобы создать оптимальную слоистую стопку, собирающую излучение от многих границ.

При прохождении быстрых частиц через слоистую среду, из-за интерференции переходных излучений от различных слоев, возникает так называемое резонансное излучение, где разные частотные гармоники генерируются с разных пороговых значений энергии пролетающей частицы [7—9]. В слоистых средах определенных структур испускаются несколько квантов с одного метра пробега с частотами, намного превышающими оптические.

С точки зрения спектральной структуры испускаемого излучения задача о прохождении заряженной частицы через слоистую среду эквивалента задаче о пролете частицы через периодическое электрическое поле [10].

Однако интенсивность излучения и энергетическая зависимость совершенно другие. Именно поэтому ниже рассматривается задача об излучении быстрых заряженных частиц в поперечном электростатическом синусоидальном поле [11—13].

2. Пусть частица с зарядом e и с энергией $\gamma \gg 1$ движется в пустоте вдоль оси z с постоянной скоростью $v_z = v \to c$ в поперечном электростатическом поле

$$E_x = E_0 \cos \frac{2\pi z}{l}, \quad E_y = E_z = 0 \tag{1}$$

и в момент времени $t = 0$ находится в точке $x = -x_0$, $y = z = 0$. Из уравнений движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}, \quad \vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v} \tag{2}$$

получим координаты и скорость частицы

$$\begin{gathered} \vec{r}(t) = (-x_0 \cos \Omega t,\ 0,\ vt), \\ \vec{v}(t) = (x_0\, \Omega \sin \Omega t,\ 0,\ v), \quad \Omega = \frac{2\pi c}{l},\ x_0 = \frac{ec^2 E_0}{\mathrm{E}\Omega^2}, \end{gathered} \tag{3}$$

где E энергия частицы, которую мы предполагаем постоянной. Постоянство энергии накладывает дополнительное условие, при котором получаются решения (3):

$$\left(\frac{M}{M_e}\right)^2 \gamma^2 \gg 10^{-8} E_0^2 l^2, \tag{4}$$

где M — масса пролетающей частицы, а M_e — масса электрона.

Спектральную интенсивность излучения вычислим по формуле [14]

$$\frac{dW_\omega}{d\omega do} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\vec{n}\vec{v}(t)] \exp\{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}(t))\}\, dt \right|^2, \tag{5}$$

где $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$, $do = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$, $\vec{n}$ — единичный вектор по направлению излучения.

Подставляя значения $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$ из (3) в (5) и воспользовавшись соотношениями

$$e^{i\alpha \cos \Omega t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\alpha)\, e^{im\Omega t}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c} x_0 \sin\vartheta \cos\varphi,$$

$$2i \sin \Omega t = e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}, \quad J_{m-1}(\alpha) + J_{m+1}(\alpha) = \frac{2m}{\alpha} J_m(\alpha), \tag{6}$$

получим

$$\frac{dW_\omega}{d\omega do} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3}\left|\vec{I}_\omega\right|^2,$$

$$\vec{I}_\omega = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m\left(\vec{A} - \frac{m}{\alpha}\vec{B}\right)J_m(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\exp i\left[(1-\beta\cos\vartheta)\,\omega + m\Omega\right]tdt. \tag{7}$$

Здесь J_m—Бесселевы функции, вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ имеют вид

$$\vec{A} = \vec{i}v\sin\vartheta\sin\varphi - \vec{j}v\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$\vec{B} = \vec{j}x_0\Omega\cos\vartheta - \vec{k}x_0\Omega\sin\vartheta\sin\varphi, \tag{8}$$

а $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — орты по осям x, y, z.

Отбрасывая в (7) все гармоники с положительными $m \geqslant 0$ (так как они не генерируются), заменяя, далее, как обычно, один интеграл временем пролета T, а другой на $2\pi\delta$-функцию получим

$$\frac{dW_\omega}{d\omega do} = \frac{e^2\omega^2}{2\pi c^3}\,T\sum_{m=1}^{\infty}\left(\vec{A} + \frac{m}{\alpha}\vec{B}\right)^2 J_m^2(\alpha)\,\delta\left\{(1-\beta\cos\vartheta)\,\omega - m\Omega\right\}. \tag{9}$$

Проинтегрировав (9) по ϑ в пределах $(0, \pi)$ и разделив на vT, получим энергию, излученную с единицы пути в интервале частот $d\omega$ в виде

$$dJ_\omega = \frac{e^2\omega}{2\pi c^2}\,d\omega\sum_{m=1}^{\tilde{\omega}}\int_0^{2\pi}D_m J_m^2(\alpha_m)\,d\varphi,$$

$$\alpha_m = \frac{\omega}{c}x_0\sin\vartheta_m\cos\varphi,\quad \cos\vartheta_m = \frac{1}{\beta} - \frac{m\Omega}{\beta\omega}, \tag{10}$$

$$D_m = \frac{\sigma_m^2}{\sin^2\vartheta_m\cos^2\varphi} - \frac{1}{\beta^2\gamma^2},\quad \sigma_m = \frac{m\Omega}{\beta\omega},$$

Формула (10) по своему виду похожа на соответствующие формулы работы [10].

Воспользовавшись разложением [15]

$$J_m^2(\alpha_m) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\Gamma(2m+2n+1)\,\alpha_m^{2m+2n}}{2^{2m+2n}n!\,\left[\Gamma(m+n+1)\right]^2\Gamma(2m+n+1)}, \tag{11}$$

и проинтегрировав (10) по φ, получим

$$dJ_\omega = \frac{e^2\omega d\omega}{c^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^2\Omega^2}{\beta^2}A_m^n(\omega\sin\vartheta_m)^{2m+2n-2} -$$

$$- \frac{e^2\omega d\omega}{c^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^2\gamma^2}B_m^n(\omega\sin\vartheta_m)^{2m+2n}, \tag{12}$$

где введены обозначения

$$A_m^n = \frac{(-1)^n (2m+2n)!\,(2m+2n-2)!\,\tau^{2m+2n}}{2^{4m+4n-2}\,n!\,[(m+n)!]^2\,(2m+n)!\,[(m+n-1)!]^2},$$

$$B_m^n = \frac{(-1)^n [(2m+2n)!]^2\,\tau^{2m+2n}}{2^{4m+4n}\,n![(m+n)!]^4\,(2m+n)!}, \qquad (13)$$

$$\alpha_m = \tau\omega \sin\vartheta_m \cos\varphi, \quad \tau = \frac{x_0}{c}.$$

Из требования $-1 \leqslant \cos\vartheta_m \leqslant +1$ получаем интервал частот для m-ой гармоники излучения

$$\omega_{1m} = \frac{m\Omega}{1+\beta} = \frac{m\Omega}{2} \leqslant \omega \leqslant \frac{m\Omega}{1-\beta} = 2m\Omega\gamma^2 = \omega_{2m}. \qquad (14)$$

Отсюда видно, что при $\beta \to 1$ нижний предел по частоте от энергии частицы не зависит, в то время как верхний предел растет пропорционально квадрату энергии. Замечая, что

$$\omega^2 \sin^2\vartheta_m = \frac{1}{\beta^2\gamma^2}(\omega - \omega_{1m})(\omega_{2m} - \omega), \qquad (15)$$

проинтегрируем в (12) каждую гармонику по частотам в пределах от ω_{1m} до ω_{2m}. В результате для полной излученной энергии с единицы пути получим следующее выражение:

$$J = \sum_{m=1}^{\infty} J_m = \frac{\pi^2 e^2}{l^2}\gamma^2 \sum_{m=1}^{\infty} m S_m,$$

$$S_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, m\,(2m+2n)!\,(m\Omega\tau_0)^{2m+2n}}{2^{2m+2n-2}\,n!\,[(m+n)!]^2\,(2m+n)!\,[4(m+n)^2-1]}, \quad \tau_0 = \gamma\tau. \qquad (16)$$

Аналогично для полного числа испущенных фотонов с единицы пути получим

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} N_m = \frac{e^2}{\hbar c}\,\frac{2\pi}{l} \sum_{m=1}^{\infty} S_m. \qquad (17)$$

3. Рассмотрим некоторые числовые данные, полученные на электронно-вычислительных машинах „Раздан-3“ и „Раздан-2“. Если амплитуду электрического поля взять $E_0 = 3\cdot 10^6$ *в/см*, то для электронов при $\gamma \gtrsim 10^2$ l можно варьировать в пределах $0 \div 25$ *см*, не противореча условию (4). В таблице работы [13] приведены числа фотонов, испускаемых с 1 *м* пути для разных значений m и l, т. е. значения N_m

К сожалению, из-за переполнения памяти вычислительных машин, не удалось получить более полную таблицу. При необходимости можно прибегнуть к двойному программированию и получить гораздо больше данных. Однако и приведенная таблица уже дает возможность сделать некоторые заключения. Прежде всего, для каждого определенного l число квантов N_m уменьшается с ростом m, причем, чем больше l, тем это уменьшение происходит медленнее. Далее, для каждого m имеется оптимальное l, при котором излучение максимальное, что вполне естественно.

В нашей таблице эта закономерность отражена лишь при $m = 1$, когда число квантов растет при увеличении l до значения 19 *см* и затем падает с дальнейшим его ростом. Распределение числа квантов в зависимости от частоты в пределах, даваемых формулой (14), можно найти, если выражение (12) поделить на $\hbar\omega$. Тогда, с учетом (15), заключаем, что каждое слагаемое в получаемой формуле имеет множитель типа $[(\omega - \omega_{1m})(\omega_{2m} - \omega)]^p = f_{m,\,p}(\omega)$. Эта функция имеет максимум при $\omega = \omega_{m,\,\max} = \frac{1}{2}(\omega_{1m} + \omega_{2m}) \simeq \frac{1}{2}\omega_{2m} = m\Omega\gamma^2$ для любого значения p*. С ростом p максимум становится резче. Средняя энергия испущенных фотонов в каждой гармонике равна $0{,}25\hbar\omega_{m,\,\max}$, так как по формулам (16) и (17) получаем $N_m\hbar\omega_{m,\,\max}\cdot 0{,}25 = J_m$. Таким образом, при данном значении m все члены суммы по n, а значит и сама сумма по n, имеет максимум при указанной частоте, т. е. в данной гармонике излучение сконцентрировано около верхнего края области частот.

Как показывает формула (17), число квантов не зависит от энергии частицы как для каждой гармоники, так и для всего излучения. Это согласуется с тем, что как полная излученная энергия (16), так и верхняя граница интервала частот (14) пропорциональна γ^2. С ростом γ энергия каждого излученного кванта растет пропорционально γ^2, а число квантов остается при этом неизменным.

Так как N_m уменьшается очень медленно с увеличением m, можно ожидать, что большое число гармоник будут давать существенный вклад в общее число квантов. Число таких гармоник можно оценить следующим образом. По своей структуре рассматриваемая задача схожа с задачей о синхротронном излучении. Как известно [16], интенсивность этого излучения при $1 \ll m \ll \gamma^3$ растет пропорционально $m^{1/3}$. С другой стороны, частота излучения $\sim m$, а $N_m \sim m^{-2/3}$.

Если существенными (в смысле числа фотонов) считать все гармоники вплоть до k-ой, когда число фотонов уменьшается, например, в 10 раз по сравнению с числом квантов в первых гармониках, то получим $k \approx 35$. С учетом приведенной таблицы, мы заключаем, что с 1 *м* пути испускается около 50 квантов с энергиями в пределах $\hbar\Omega\gamma^2 \div 35\hbar\Omega\gamma^2$. Ондулятор с длиной в несколько метров будет излучать около сотни таких квантов. Это обстоятельство дает возможность использовать описанное излучение для регистрации частиц высоких энергий. Для оценки верхнего предела энергии частиц, при котором справедлива рассмотренная задача, потребуем, чтобы полная излученная энергия была намного меньше энергии самой частицы, т. е. [11]

---

* Кроме первой гармоники, для которой эта функция имеет минимум.

$$\frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{M_e c^2}\right)^2 E_0^2 L \gamma^2 \ll M_e \gamma c^2, \tag{18}$$

где L длина ондулятора. Это условие совместно с нашим первоначальным предположением об энергии частицы дает $10^2 \lesssim \gamma \lesssim 10^7$.

Параметр $\Omega\tau_0$, входящий в формулу (16, 17), зависит от массы частицы, и для тяжелых частиц число квантов существенно уменьшается. Однако в этом случае вместо электрических ондуляторов можно пользоваться магнитными, имея в виду, что напряженность достижимых магнитных полей на два порядка выше электрических, что может компенсировать влияние массы мезонов на уменьшение числа испущенных фотонов.

В заключение выражаю благодарность С. С. Элбакяну за большую помощь в расчетах, а также И. М. Франку, Г. М. Гарибяну, Б. М. Болотовскому, Г. С. Саакяну, Г. А. Аскарьяну, М. Магомедову за обсуждения.

Ереванский государственный университет Поступила 8.VI.1970

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. М. Болотовский*, УФН, 75, 295 (1961); 62, 201 (1957).
2. *Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко*, УФН, 86, 189 (1965).
3. *И. М. Франк*, 87, 189 (1965).
4. *В. Л. Гинзбург, И. М. Франк*, ЖЭТФ, 16, 15 (1945).
5. *Г. М. Гарибян*, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).
6. *Н. А. Корхмазян, С. С. Элбакян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 4, 3 (1969).
7. *М. Л. Тер-Микаелян*, ДАН СССР, 134, 318 (1960).
8. *Г. М. Гарибян*, ЖЭТФ, 35, 1435 (1958).
9. *А. Ц. Аматуни, Н. А. Корхмазян*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 5, 55 (1960).
10. *М. Л. Тер-Микаелян*, Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Изд. АН АрмССР, Е., 1969.
11. *В. Л. Гинзбург*, Изв. АН СССР, сер. физич., 11, 1965 (1947).
12. „Миллиметровые и субмиллиметровые волны" (сборник статей). Изд. ин. литературы, М., 1959.
13. *Н. А. Корхмазян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 5, вып. 4 (1970).
14. *Дж. Джексон*, Классическая электродинамика. Изд. Мир, М., 1966.
15. *И. С. Градштейн, И. С. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гос. изд. физ. мат. литературы, М., 1962.
16. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Гос. изд. физ.-мат. литературы, М., 1967.

ԿՈՇՏ ՔՎԱՆՏՆԵՐԻ ԱՌԱՋԱՑՈՒՄԸ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՕՆԴՈՒԼՅԱՏՈՐՆԵՐՈՒՄ

Ն. Ա. ՂՈՐԽՄԱԶՅԱՆ

Դիտարկված է գերարագ լիցքավորված մասնիկների ճառագայթումը ընդլայնական էլեկտրաստատիկ սինուսոիդալ դաշտում։ Ստացված են բանաձևեր լրիվ ճառագայթված էներգիայի և միավոր ճանապարհից ֆոտոնների թվի համար։ Ուսումնասիրված է ճառագայթման սպեկտրը, որը բաղկացած է տարբեր հաճախության հարմոնիկներից, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի որո-

շակի սահմաններ, որոնց կիսագումարը հավասար է մաքսիմալ ճառագայթման հաճախությանը։ Առաքված քվանտների թիվը յուրաքանչյուր հարմոնիկում արտաքին դաշտի տրված ամպլիտուդի և պարբերության համար հաստատուն է և կախված չէ մասնիկի էներգիայից։

Ճառագայթման ինտենսիվությունը ուղիղ համեմատական է էներգիայի քառակուսուն։ Աշխատանքի արդյունքները հնարավորություն են տալիս չափելու արագ մասնիկների էներգիան։

PRODUCTION OF HARD QUANTA IN ELECTRIC ONDULATER

N. A. KORHMAZIAN

The problem of relativistic charged particles radiation in the transversal electrostatical sinusoidal field is considered. Formulae for total radiation energy and for photon number per path flight unit have been obtained. The radiation spectrum is also studied.

The spectrum consists of harmonics of various frequencies, each having certain limits, the half-sum of which is equal to the maximum of radiation frequency. The number of emitted quanta in each harmonic at the given amplitude and period of internal field is constant and does not depend on the particle energy. The raqiation intensity is proportional to the square of the particle energy. The results of the present work render the measurement of the fast particle energy possible.