

О ПРЕДЕЛАХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРА С ИНДУЦИРОВАННЫМ ТОКОМ. I

Р. М. АРУТЮНЯН

В рамках полуфеноменологической теории Гинзбурга-Ландау рассматриваются условия термодинамической устойчивости сверхпроводящего цилиндра с индуцированным в нем током.

Толщина стенок цилиндра меньше лондоновской глубины проникновения.

Определяется зависимость критического значения плотности тока от размеров образца.

Как известно, в термодинамике сверхпроводников один из основных вопросов заключается в том, до какого максимального значения тока возможно существование сверхпроводящего состояния. Этот вопрос достаточно хорошо исследован для проволок и пленок с поперечными размерами, меньшими по сравнению с лондоновской глубиной проникновения $\delta_0(T)$ [1, 2, 5]. Из уравнений Гинзбурга-Ландау следует, что вблизи критической температуры $T_{кр}$ для пленок толщиной $2d < \delta_0(T)$ максимальная величина плотности тока равна $j_0 = 2/3 \sqrt{3}$ [1]. Здесь и далее все величины даются в приведенных единицах [1]. Такая же величина максимальной плотности тока получается и для проволок с диаметром $2d < \delta_0$. Рассматривая этот вопрос для проволоки с током, Амбекаокар и Лангер показали, что если пренебречь магнитным полем, обусловленным током, уравнения Гинзбурга-Ландау не имеют решений при $j_0 > 2/3 \sqrt{3}$ [2].

Однако при $j_0 = 2/3 \sqrt{3}$ свободная энергия F_s проволок и пленок все еще меньше свободной энергии в нормальном состоянии F_n [3]. С другой стороны, при определении выражения свободной энергии вещества с током, существенное значение имеет учет того факта, что токи являются замкнутыми [4]. С этой точки зрения рассмотрение случая бесконечной пленки и проволоки с током является идеализированным. Поэтому представляет интерес исследовать уравнения Гинзбурга-Ландау и определить максимальное значение плотности тока в случае тонкостенного цилиндра с индуцированным в нем током.

Известно, что вблизи критической температуры $T_{кр} - T \ll T_{кр}$ свободная энергия F_s сверхпроводника равна [1]

$$F_s = F_n + \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \int \left\{ -|\psi|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^4 + \vec{H}^2 + \left| \frac{i}{x} \vec{\nabla} \psi + \vec{A} \psi \right|^2 \right\} dv, \quad (1)$$

где F_n — свободная энергия в нормальном состоянии, H_{cm} — критическое поле массивного образца, ψ — волновая функция, пропорциональная щели сверхпроводника, $\vec{A}$ — векторный потенциал, а x — характеристический параметр сверхпроводящего материала.

$\psi, \vec{A}$ определяются из уравнений Гинзбурга и Ландау [1]

$$\left(\frac{i}{z} \vec{\nabla} + \vec{A}\right)^2 \psi - \psi + \psi^2 \psi^* = 0, \quad (2)$$

$$-j = -\text{rot rot } \vec{A} = \frac{i}{2z} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) + \vec{A} \psi \psi^*. \quad (3)$$

Прежде чем перейти к цилиндру с током, рассмотрим вкратце, как определяется критическое значение плотности тока с помощью (1), (2), (3) для бесконечной пленки при $2d < \delta_0(T)$. После соответствующей калибровки уравнения (2) и (3) принимают вид [1]

$$-\frac{1}{z^2} \frac{d^2 f}{dz^2} = -f + f^3 + A^2 f, \quad (2a)$$

$$\frac{d^2 A}{dz^2} = A f^2. \quad (3a)$$

Здесь f — модуль волновой функции, ось z направлена перпендикулярно поверхности пленки, а ток $\vec{j}$ — по оси x . Поскольку при $2d < \delta_0(T)$ изменением по толщине пленки можно пренебречь, то из (3a), учитывая, что на поверхности пленки при $\pm d$ магнитное поле, обусловленное током, равно H_1 , имеем [1]

$$A = \frac{H_1 \text{ch } f_0 \cdot z}{f_0 \text{sh } f_0 \cdot d}. \quad (4)$$

Ввиду того, что $f_0 = \text{const}$, $d \ll 1$, с помощью (2a) и (4) находим

$$-f_0 + f_0^3 + j_0^2/f_0^3 = 0, \quad (5)$$

где $j_0 = H_1/d$ — плотность тока в пленке; здесь $j_0 = \text{const}$. Уравнение (5) справедливо и при произвольной координатной зависимости плотности тока $\vec{j}$, которое можно получить непосредственно, исключая $\vec{A}$

из (2) и (3). При заданном значении j_0 уравнение (5) имеет только два положительных решения f_{01}, f_{02} ($f_{01} \leq f_{02}$). Минимуму свободной энергии F_s (1) соответствует f_{02} [1, 5]. При решении f_{01} пленка не может находиться в термодинамическом равновесии или, иначе говоря, f_{01} не является точкой минимума для F_s [1, 5]. С увеличением j_0 значение f_{02} уменьшается (соответственно f_{01} растет). Максимальная величина плотности тока j_{0kr} определяется из условия $\frac{dj}{df} = 0$. С помощью (5)

находим, что $j_{0kr} = 2/3 \sqrt{3}$. При $j_0 > j_{0kr}$ уравнение (5) не имеет решений. Для модуля f_{0kr} при j_{0kr} имеем [1, 5]

$$f_{0kr}^2 = 2/3 \quad (f_{01} = f_{02} = f_{0kr}).$$

Аналогичным образом определяются f_{0kr} и j_{0kr} для проволоки с током.

Согласно [6, 7] для цилиндра, помещенного во внешнее магнитное поле $\vec{H}_0$, минимальной является термодинамическая функция

$$\Phi_s = F_s - 2 \vec{H}_2 \int_{R_1}^{R_2} \vec{H} dV + \vec{H}_1^2 V_1, \quad (6)$$

где F_s — свободная энергия, определяемая выражением (1), $\vec{H}_1$ — поле внутри цилиндра, R_2, R_1 — соответственно внешний и внутренний радиусы, а V_1 — объем полости цилиндра. Будем считать, что $\vec{H}_2, \vec{H}_1$ направлены по оси z цилиндра. Так как вдоль оси z задача однородная, то в выражении (6) по z будем подразумевать единичную длину интегрирования. Поскольку рассматривается цилиндр с толщиной стенок $d = R_2 - R_1$, ($R_2, R_1 \gg d$), намного меньшей лондоновской глубины проникновения $\delta_0(T)$, то изменением (4) по толщине образца можно пренебречь [7, 9].

В отличие от пленки и проволоки, в случае цилиндра фазу $\varphi(l)$ волновой функции

$$\psi(l) = f(l) \exp[i\varphi(l)]$$

нельзя не учитывать (здесь $l = R \cdot \theta$, где θ угол вокруг оси цилиндра). Ввиду однозначности $\psi(l)$ для фазы $\varphi(l)$ имеем

$$\varphi(l+L) - \varphi(l) = 2\pi n, \quad (7)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $L = 2\pi R$ — длина поперечного сечения цилиндра. При $f = \text{const}$ решение уравнения (3) имеет вид [7, 9]

$$A = \frac{\hbar c n}{2e\delta_0 R} + \delta_0 (aI_1(R) + bK_1(R)) \quad (8)$$

и соответственно

$$H = aI_0(R) - bK_0(R), \quad (8a)$$

где K_0, K_1 и I_0, I_1 — известные цилиндрические функции (8). Из (8), (8a) и (3) следует, что при $d < \delta_0$, $d < R_1, R_2$ изменением $\vec{j}$ и $\vec{A}$ по толщине цилиндра можно пренебречь. Так как $\vec{A}$ и $\vec{j}$ направлены по l , то в этом случае величину $\vec{j}$ можно определить, непосредственно интегрируя (3) по контуру L ,

$$j = \frac{\left(\frac{2\pi}{\chi} n - H_2 \cdot S_1\right) f^2}{L + S_1 d \cdot f^2}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что плотность тока j является функцией от числа квантования n , внешнего поля $\vec{H}_2$ и модуля $f(l)$ волновой функции. Поэтому, если в случае пленок или проволок при $f = \text{const}$ и $j = \text{const}$ уравнение (5) решается при заданном j , то в случае цилиндра урав

ние (5) следует решить при заданных значениях H_2, n . Действительно, подставляя (9) в (5) имеем

$$-f + f^3 + \left(\frac{2\pi}{z} n - H_2 S_1 \right)^2 \cdot f = 0. \quad (10)$$

Соответствующим образом и минимизируемую функцию Φ_s (6) необходимо рассматривать при заданных H_2, n .

Учитывая, что

$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{H}^2 dV = \int_{R_1}^{R_2} \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot dV + \vec{H}_2 \int_0^{R_2} \vec{H} dV - H_2^2 V_1, \quad (11)$$

из (1), (6), (11) для Φ_s находим

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_s - F_{n_0}}{H_{cm}^2/4\pi} = & \int_{R_1}^{R_2} \left\{ -|\psi|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^4 + \left| \frac{i}{z} \vec{\nabla} \psi + \vec{A} \psi \right|^2 \right\} dV + \\ & + \int_{R_1}^{R_2} \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot dV - \vec{H}_2 \int_0^{R_2} \vec{H} \cdot dV. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя $\vec{A}$ из (3) в (12), получаем

$$\frac{\Phi_s - F_{n_0}}{d \cdot H_{cm}^2/4\pi} = \left(-f^2 + \frac{1}{2} f^4 \right) L + \frac{2\pi n}{z} \cdot j - \vec{H}_2 \int_0^{R_2} \vec{H} \cdot dV. \quad (13)$$

Так как нас интересует случай, когда внешнее поле отсутствует ($\vec{H}_2 = 0$), то для (9), (10) и (13) соответственно имеем

$$j = \frac{2\pi}{z} \cdot n \cdot f^2, \quad (14)$$

$$-f + f^3 + \left(\frac{2\pi n}{z} \right)^2 \frac{f}{(L + S_1 d \cdot f^2)^2} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\Phi_s - F_{n_0}}{d \cdot H_{cm}^2/4\pi} = \left(-f^2 + \frac{1}{2} f^4 \right) L + \left(\frac{2\pi n}{z} \right)^2 \frac{f^2}{L + S_1 d \cdot f^2}. \quad (16)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (15) можно получить из условия $\partial \Phi_s / \partial f = 0$. Из (15) видно, что для любых значений n $\partial \Phi_s / \partial f = 0$ при $f = 0$. Для определения остальных решений (15) рассмотрим две кривые (рис. 1)

$$\begin{aligned} Y_1 &= 1 - f^2, \\ Y_2 &= \left(\frac{2\pi n}{z} \right)^2 \frac{1}{(L + S_1 d \cdot f^2)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

$-\partial Y_2 / \partial f^2$, $Y_2(f^2)$ принимают наибольшие значения при $f = 0$.

Из (17) следует, что при $S_1 \cdot d/L > 1 - \frac{\partial Y_2}{\partial f^2} \Big|_{f=0} > Y_2(0)$. Поэтому уравнение (16) имеет только один отличный от нуля положительный

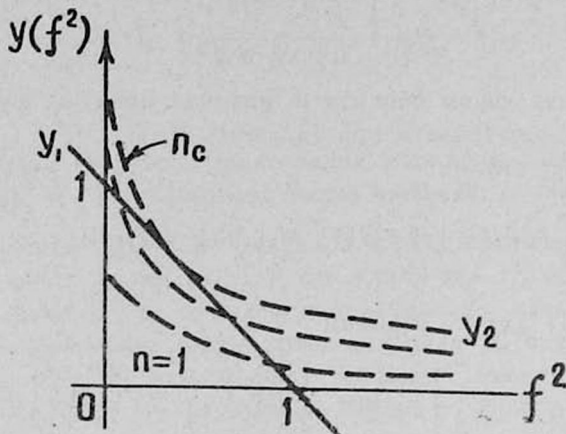


Рис. 1.

корень при таких значениях n , когда $Y_2(0) < 1$. При $Y_2(0) = \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 \times \times \frac{1}{L^2} > 1$ кривые Y_1 , Y_2 пересекаются при двух значениях f^2 . Соответственно уравнение (15) при заданном n имеет два положительных решения. В этом случае на кривых свободной энергии $\Phi_s(f^2)$, кроме минимума появляются и точки максимума (рис. 2). При определенном

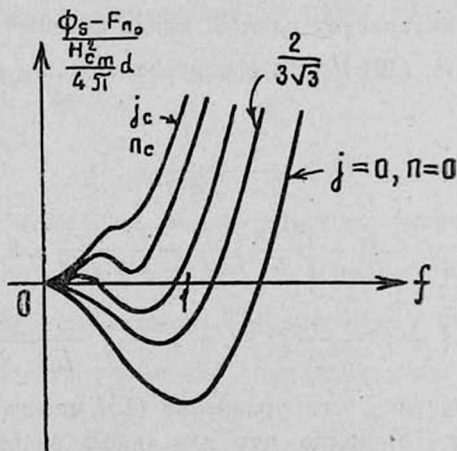


Рис. 2.

значении $n = n_{kr}$ максимум и минимум Φ_s сливаются, что соответствует точке перегиба. Поэтому для $n > n_{kr}$ уравнение (15) не имеет отличных от нуля решений.

Величина n_{kr} определяется из условий

$$\begin{aligned}\partial\Phi_s/\partial f &= 0, \\ \partial^2\Phi_s/\partial f^2 &= 0.\end{aligned}\quad (18)$$

С помощью (17) и рис. 1 находим, что

$$\frac{2\pi}{z} n_{kp} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(1 + \frac{L}{S_1 d}\right)^{3/2} \cdot S_1 \cdot d. \quad (19)$$

Соответственно при n_{kp} (19) для f^2 , j , Φ_s имеем

$$f_{kp}^2 = \frac{2}{3} (1 - L/2 S_1 d), \quad (20)$$

$$j_{kp} = \frac{2}{3\sqrt{3}} (1 + L/S_1 d)^{1/2} \cdot (1 - L/2 S_1 d), \quad (21)$$

$$\frac{\Phi_s - F_{n_0}}{d \cdot H_{cm}^2 / 4\pi} = (1 - L/2 S_1 d) \left\{ -\frac{4}{9} L - \frac{2}{9} \frac{L^2}{2 S_1 d} + \frac{4}{27} S_1 d (1 + L/S_1 d)^2 \right\}.$$

Из (22) получаем, что при $S_1 d > L$ вблизи n_{kp} $\Phi_s - F_{n_0} > 0$. Поэтому представляет интерес определить, при каком значении числа квантования n цилиндр с током переходит в нестабильное состояние. С помощью (15), (16) находим

$$\frac{\Phi_s - F_{n_0}}{d \cdot H_{cm}^2 / 4\pi} = f^4 \cdot \left\{ -\frac{1}{2} L + S_1 d - S_1 d f^2 \right\}. \quad (23)$$

Учитывая, что $\left(\frac{2\pi n}{z}\right)^2 = (1 - f^2)(L + S_1 d \cdot f^2)^2$, из (23) можно определить, что минимальное значение термодинамической функции положительное, $\min(\Phi_s - F_{n_0}) > 0$, при

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (L \cdot S_1 \cdot d)^{1/2} \left(1 + \frac{L}{2 S_1 d}\right) < \frac{2\pi n}{z} < \frac{2}{3\sqrt{3}} d \cdot S_1 \left(1 + \frac{L}{S_1 d}\right)^{3/2}, \quad (24)$$

и соответственно

$$\frac{2}{3} \left(1 - \frac{L}{2 S_1 d}\right) < f_{\min}^2 < 1 - \frac{1}{2} \frac{L}{S_1 d}. \quad (25)$$

Хотя с увеличением $\min(\Phi_s - F_{n_0})$, число квантования n растет, этого нельзя утверждать относительно плотности тока j . Действительно, из (14), (15) имеем

$$j = f^2 \cdot (1 - f^2)^{1/2}. \quad (26)$$

Из условия $dj/df = 0$ находим, что максимальное значение j имеет место при $f_{\min}^2 = \frac{2}{3} [1, 5]$. Поэтому в интервале

$$\frac{2}{3} \left(1 - \frac{L}{2 S_1 d}\right) < f_{\min}^2 < 2/3, \quad (27)$$

с увеличением минимального значения Φ_s величина плотности тока уменьшается. Это становится понятным, если обратиться к уравнению

(5). При заданном j_0 уравнение (5) имеет два положительных решения f_{01}, f_{02} ($f_{01} < f_{02}$).

Если в случае пленок и проволок осуществляются только состояния с f_{02} [1, 5], то согласно (27), в случае цилиндра сверхпроводник может находиться в термодинамическом равновесии и в состоянии с f_{01} . Из (19), (20), (21) следует, что найденные нами критические параметры находятся в зависимости от размеров образца. При $L/S_1 d \rightarrow 0$ f_{kp}^2, j_{kp} (20, 21) становятся равными соответствующим критическим значениям пленок и проволок, несмотря на то, что при этом термодинамическая функция Φ_s (22) стремится к бесконечности. С увеличением отношения $L/S_1 d$ критические значения f_{kp}^2, j_{kp}, Φ_s (23) уменьшаются и при $\frac{L}{2S_1 d} \rightarrow 1$ стремятся к нулю.

Представляет интерес также случай $L/2S_1 d > 1$, т. е. когда имеются цилиндры малых размеров ($R_1 \cdot d < \delta_0^2$). Из соотношений (17) и рис. 1 следует, что в этом случае кривые $Y_1(j^2), Y_2(f^2)$ могут пересекаться только при одном значении f^2 . Поэтому для цилиндров таких размеров свободная энергия Φ_s (рис. 2) уже не имеет точек максимумов, а равновесное значение ($\Phi_s - F_{n_0}$) отрицательно для всех решений уравнений Гинзбурга-Ландау.

Так как количество квантованных состояний цилиндра уменьшается с уменьшением параметра κ , то из (17) и рис. 1 можно определить тот критический радиус, меньше которого цилиндр из сверхпроводников первого рода, возможно, не имеет ни одного квантового состояния. При $\kappa \gg 1$ число состояний цилиндра соответственно увеличивается. При $2/3 \leq f_{\min}^2 \leq 1$ с увеличением равновесного значения свободной энергии Φ_s плотность тока растет от нуля до максимально возможного значения $2/3\sqrt{3}$. При $0 \leq f_{\min}^2 \leq 2/3$ с увеличением $\min(\Phi_s - F_{n_0})$ плотность тока уменьшается от $2/3\sqrt{3}$ до нуля.

Как было определено, для цилиндров с размерами $L/2S_1 d < 1$ возможен только фазовый переход первого рода. В критической точке в этом случае плотность тока j_{kp} определяется выражением (21). При $\frac{2}{3} (1 - L/2 S_1 d) \leq f_{01}^2 \leq 2/3$ число квантованных состояний цилиндра порядка $\Delta n \approx \kappa \delta_0/d$.

Учитывая, что для $j_{kp} \leq j_0 \leq 2/3\sqrt{3}$ осуществляются состояния как с модулем f_{02} , так и f_{01} , то при $j_{kp} \leq j_0$ плотность состояний цилиндра соответствующим образом увеличивается.

Таким образом, если при $0 \leq j_0 \leq j_{kp}$ число состояний определяется только дискретными решениями f_{02} , то при $j_{kp} \leq j_0 \leq 2/3\sqrt{3}$ каждое состояние с модулем f_{02} имеет свое парное состояние с модулем f_{01} ($f_{01} < f_{02}$). Соответственно, в этом случае $\Phi_2 < \Phi_1$.

При этом можно показать, что в общем случае парные значения модулей f_{01} и f_{02} одновременно не могут удовлетворить уравнению (5) при одном значении j_0 .

Поступила 12.V.1970

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 20, 1064 (1950).
2. J. S. Langer, V. Ambegaokar, Phys. Rev. 164, 498 (1967).
3. J. Bardeen, Review of modern Physics. 34, 667 (1962).
4. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат Москва, 1957.
5. В. А. Гинзбург, ДАН СССР, 118, 464 (1958).
6. В. А. Гинзбург, ЖЭТФ, 34, 113 (1958).
7. В. А. Гинзбург, ЖЭТФ, 42, 299 (1962).
8. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, Москва, 1958.
9. Сюй Лун-дао, Г. Ф. Жарков, ФММ, 16, 820 (1963).

ԻՆԴՈՒԿՏՎԱԾ ՀՈՍԱՆՔՈՎ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻԶ ԳԼԱՆԻ ԹԵՐՄՈԴԻՆԱՄԻ-
ԿԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Գինզբուրգ-Լանդաուի կիսաֆենոմենոլոգիական տեսության շրջանակներում դիտարկվում են գերհաղորդիչ զլանում ինդուկտված հոսանքի թերմոդինամիկական կայունության պայմանները: Դրանի պատերի հաստությունը փոքր է Լոնդոնյան թափանցման խորությունից: Որոշվում է հոսանքի խտության կրիտիկական արժեքի կախումը նմուշի չափերից:

ON THE LIMITS OF THERMODYNAMICAL STABILITY OF A SUPERCONDUCTING CYLINDER WITH INDUCED CURRENT

R. M. HARUTUNIAN

From the viewpoint of the quasiphenomenological Ginzburg-Landau theory the conditions of the thermodynamic stability of a superconducting cylinder with induced current is considered.

The thickness of the cylinder walls is less than the Londonian penetration depth. The current density critical value dependence on the sample dimensions is determined.